CORRIGÉ : MATH 2 ; MP ; X_2010

I] Sous groupes finis de GL(E)

1) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et G un sous groupe fini de $GL(E)$.
Écartons le cas trivial où $|G| = 1$ et supposons que $|G| = m \geq 2$.
Soit $g \in G$, alors $g^m = Id_E$ et $X^m - 1$ est un polynôme annulateur de g, scindé à racines simples. D'où g est diagonalisable.
On suppose maintenant que G est commutatif. Par récurrence sur $n = \dim(E)$ on va montrer que tous les élèments de G sont diagonalisables dans une même base de E.
Le cas où tous les élèments de G sont des homothéties est évident, supposons alors que G admet au moins un élèment g qui n'est pas une homothétie.
Le cas $n = 1$ est évident.
Soit $n \geq 2$ tel que si $1 \leq \dim(E) \leq n-1$ le résultat de cette question est vérifié.
Supposons maintenant que $\dim(E) = n$, et soient $E_1, \ldots, E_k$ les sous espaces propres de g, soient $g_1, \ldots, g_m$ les m élèments de G, et $h_1, \ldots, h_m$ leurs restrictions à E_1, g commute avec chaque g_j, alors E_1 est stable par chaque g_j, et puisque E_1 est de dimension finie et chaque g_j est injectif , alors $H = \{h_j ; 1 \leq j \leq k\}$ est un sous groupe de $GL(E_1)$; H est abélien puisque G l'est; $1 \leq \dim(E_1) \leq n-1$. Alors par hypothèse de récurrence, tous les élèments de H sont diagonalisables dans une même base B_1 de E_1.
Alors E_1 admet une base B_1 d'élèments tous des vecteurs propres communs à tous les élèments de G. Il en est de même pour tous les autres sous espaces propres $E_1, \ldots, E_k$.
c'est à dire que chaque E_i admet une base B_i d'élèments tous des vecteurs propres communs à tous les élèments de G.
et puisque $E_1, \ldots, E_k$ sont supplémentaires dans E, alors E admet $B = (B_1, \ldots, B_k)$ comme base dans laquelle tous les éléments de g sont diagonalisables.

II Isométries du triangle

2) On se place dans le plan E euclidien orienté, muni d'un repère orthonormal centré en O.
$\widetilde{D}_3$ désigne le groupe des isométries d'un triangle équilatéral ABC de centre O.
2.a) Tout élèment de $\widetilde{D}_3$ garde O fixe, et $\{A, B, C\}$ est stable par tout élèment de $\widetilde{D}_3$, alors :
Les rotations de $\widetilde{D}_3$ sont $R(O, \frac{2\pi}{3})$; $R(O, -\frac{2\pi}{3})$; Id.
Les réflexions de $\widetilde{D}_3$ sont s_{OA} ; s_{OB} ; s_{OC} les réflexions d'axes respectifs (OA) ; (OB) ; (OC).
Au total, $\widetilde{D}_3$ est de cardinal 6.
2.b) On vectorialise le plan en O, on obtient alors la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, et les élèments de $\widetilde{D}_3$ deviennent alors des automorphismes linéaires de E (puisqu'ils garde O fixe) ; on déduit alors que $\widetilde{D}_3$ est isomorphe à un sous groupe de $GL(E)$, donc à un sous groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ et puisque $GL_2(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $GL_2(\mathbb{C})$, alors $\widetilde{D}_3$ est isomorphe à un sous groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.
Rappelons la propriété du centre de gravité : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$.
Dans l'ordre Id_E ; $R(O, \frac{2\pi}{3})$; $R(O, -\frac{2\pi}{3})$; s_{OA} ; s_{OB} ; s_{OC}
Les matrices correspondantes dans la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces six matrices forment alors un sous groupe Δ_3 de $GL_2(\mathbb{C})$, isomorphe à $\widetilde{D}_3$.

2.c) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique de A est :

$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda - j)(\lambda - j^2)$

Le sous espace propres associé à j est $E_j(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}$ et celui associé à j^2 est

$E_{j^2}(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -j^2 \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+j \end{pmatrix}$.

Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -j & -j^2 \end{pmatrix}$; $D = diag(j, j^2)$ alors $A = PDP^{-1}$.

Remarquons alors que quand X décrit une matrice de Δ_3, $P^{-1}XP$ décrit D_3.
Alors l'automorphisme intérieur $[X \mapsto P^{-1}XP]$ induit un ismorphisme de groupes de Δ_3 sur D_3.
Finalement : Le groupe $\widetilde{D}_3$ est isomorphe au groupe D_3.

III] Lemme de Schur

Notons : $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ et $E = \mathbb{C}^n$. Soit G un sous groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$.
Pour tout $B \in G$, on note $i(B)$ l'application de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$ définie par : $[M \mapsto BMB^{-1}]$.

3) C'est clair que pour tout $B \in G$, $i(B) \in GL(\mathcal{A})$.
Soient $B, C \in G$. $\forall M \in \mathcal{A}$; $i(BC)(M) = B(CMC^{-1})B^{-1} = i(B) \circ i(C)(M)$.
D'où i est un morphisme de groupes de G dans $GL(\mathcal{A})$.
i est injectif si et seulement si $\ker(i) = \{Id_E\} = \{B \in G \quad tq \quad \forall M \in \mathcal{A} ; BM = MB\}$.
Or, on sait que si $Z \in \mathcal{A}$ telle que : $\forall M \in \mathcal{A}$; $ZM = MZ$, alors Z est une homothétie.
D'où i est injectif si et seulement si G ne contient pas d'homothéties autres que l'identité.

On note : $\widetilde{G} = i(G)$ et $\mathcal{A}^{\widetilde{G}} = \{M \in \mathcal{A} \quad tq \quad \forall B \in G ; i(B)(M) = M\}$

4) Soit $M \in \mathcal{A}^{\widetilde{G}}$, M commute avec tout élèment de G, alors $\ker(M)$ et $\operatorname{Im}(M)$ sont stables par tout élèment de G, c'est à dire $\ker(M)$ et $\operatorname{Im}(M)$ sont stables par G.

5) On suppose que E est irréductible pour G. Soit $M \in \mathcal{A}^{\widetilde{G}}$.
D'aprés la question précèdente, $\ker(M)$ et $\operatorname{Im}(M)$ sont stables par G, alors d'aprés le théorème du rang, $\ker(M) = \{0\}$ et $\operatorname{Im}(M) = E$ ou $\ker(M) = E$ et $\operatorname{Im}(M) = \{0\}$.
D'où M est soit nulle soit inversible.

$\mathcal{A}^{\widetilde{G}} = \bigcap_{B \in G} \ker(i(B) - Id_{\mathcal{A}})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{A}$.

$I_n \in \mathcal{A}^{\widetilde{G}}$, alors $\dim(\mathcal{A}^{\widetilde{G}}) \geq 1$. Soit M un élèment non nul de $\mathcal{A}^{\widetilde{G}}$ et λ une valeur propre de M

$M - \lambda I_n$ est un élèment non inversible de $\mathcal{A}^{\widetilde{G}}$ donc nul, c'est à dire $M = \lambda I_n$.

Finalement $\mathcal{A}^{\widetilde{G}}$ est de dimension 1, et plus précisément $\mathcal{A}^{\widetilde{G}}$ est l'ensemble des homothéties.

6) Soient $M, N \in \mathcal{A}$. On considére l'endomorphisme de $\mathcal{A}$, défini par : $[\Phi : X \mapsto MXN]$.
Considérons la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{A}$ et posons : $M = \sum_{1 \leq i,j \leq n} M_{i,j} E_{i,j}$.

$\Phi(E_{k,l}) = \sum_{1\le i,j\le n} \sum_{1\le s,t\le n} M_{i,j}N_{s,t}E_{i,j}E_{k,l}E_{s,t} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} M_{i,k}N_{l,t}E_{i,k}E_{k,l}E_{l,t} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} M_{i,k}N_{l,t}E_{i,t}$.

Le coefficient dans cette somme de $E_{k,l}$ est $M_{k,k}N_{l,l}$.

Alors $Tr(\Phi) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} M_{k,k}N_{l,l} = \left(\sum_{k=1}^{n} M_{k,k}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} N_{l,l}\right) = Tr(M)Tr(N)$.

7) Soit $P = \frac{1}{|G|}\sum_{B\in G} B$.

7.a) Soit $Y \in G$, L'application $[X \mapsto YX]$ est une bijection de G sur G.

Alors : $\sum_{B\in G} B = \sum_{B\in G} YB$ et $P^2 = \frac{1}{|G|^2}\sum_{Y\in G}\left(\sum_{B\in G} YB\right) = \frac{|G|}{|G|^2}\sum_{B\in G} B = P$.

$X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme scindé à racines simples qui annule P, alors P est diagonalisable.

7.b) Soit $x \in E^G$; $\forall B \in G$; $B(x) = x$ et $P(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{B\in G} x = x$. alors $x \in \mathrm{Im}(P)$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(P)$, P est un projecteur, alors $P(x) = x$. D'aprés la question précèdente :
$\forall C \in G$; $CP = P$. Donc : $\forall C \in G$; $C(x) = CP(x) = P(x) = x$. Donc $x \in E^G$.
Finalement : $\mathrm{Im}(P) = E^G$.
P est un projecteur, alors : $\dim(\mathrm{Im}(P)) = Tr(P)$ c'est à dire : $\dim(E^G) = \frac{1}{|G|}\sum_{B\in G} Tr(B)$.

8) <u>Premier cas :</u> **Si i est injectif**

$\widetilde{G}$ est un sous groupe fini de $GL(\mathcal{A})$ de cardinal $\left|\widetilde{G}\right| = |G|$.

On pose $Q = \frac{1}{\left|\widetilde{G}\right|}\sum_{B\in G} i(B)$. On applique les résultats de 7) à $\mathcal{A}$ au lieu de E et $\widetilde{G}$ au lieu de G.

Alors : $\dim(\mathcal{A}^{\widetilde{G}}) = \frac{1}{\left|\widetilde{G}\right|}\sum_{B\in G} Tr(i(B))$. or d'aprés 6) ; $Tr(i(B)) = Tr(B)Tr(B^{-1})$.

D'où $\dim(\mathcal{A}^{\widetilde{G}}) = \frac{1}{|G|}\sum_{B\in G} Tr(B)Tr(B^{-1})$.

<u>Deuxième cas :</u> **Cas quelconque**

On définit sur G la relation binaire $\mathbf{R}$ par : $\forall B, C \in G$; $B\mathbf{R}C \Leftrightarrow i(B) = i(C)$.
$\mathbf{R}$ est une relation d'équivalence sur G.
Notons H le sous groupe de G formé de toutes les homothéties de G.
$\forall B, C \in G$; $B\mathbf{R}C \Leftrightarrow i(B) = i(C) \Leftrightarrow B^{-1}C \in H$.
Toutes les classes d'équivalence ont le même cardinal qui est $|H|$ et $\left|\widetilde{G}\right| = \frac{|G|}{|H|}$.
Si $B, C \in G$ tels que : $i(B) = i(C)$ alors il existe un scalaire non nul α tel que : $C = \alpha B$.
Alors $Tr(C)Tr(C^{-1}) = Tr(\alpha B)Tr(\alpha^{-1}B^{-1}) = Tr(B)Tr(B^{-1})$.
Soit G' un système de représentants des classes d'équivalence de $\mathbf{R}$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{B\in G} Tr(B)Tr(B^{-1}) = \frac{1}{\left|\widetilde{G}\right||H|}\sum_{B\in G} Tr(B)Tr(B^{-1}) = \frac{1}{\left|\widetilde{G}\right||H|}\sum_{B\in G'} |H|Tr(B)Tr(B^{-1}).$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{B\in G} Tr(B)Tr(B^{-1}) = \frac{1}{\left|\widetilde{G}\right|}\sum_{\widetilde{B}\in\widetilde{G}} Tr(\widetilde{B}) = \dim(\mathcal{A}^{\widetilde{G}}).$$

<u>**NB**</u> : Notons que le premier cas est inutil, puisque c'est un cas particulier du deuxième cas.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que E est irréductible pour G.

9.a) Soit $X \in \mathcal{A}$ une matrice qui commute avec toute les matrices de G. Alors $X \in \mathcal{A}^{\widetilde{G}}$
$\mathcal{A}^{\widetilde{G}}$ est de dimension 1 (D'aprés 5) et I_n est un élèment non nul de $\mathcal{A}^{\widetilde{G}}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $X = \lambda I_n$ et $\lambda = \frac{1}{n}Tr(X)$. D'où $X = \frac{1}{n}Tr(X)I_n$.

9.b) Soit $Y = \sum_{B\in G} Tr(B^{-1})B$. Soit $Z \in G$. On a : $G = \{BZ \text{ tq } B \in G\} = \{Z^{-1}C \text{ tq } C \in G\}$.

$$YZ = \sum_{B\in G} Tr(B^{-1})BZ = \sum_{C\in G} Tr(ZC^{-1})C = Z \sum_{C\in G} Tr(C^{-1}Z)Z^{-1}C = Z \sum_{B\in G} Tr(B^{-1})B = ZY.$$

Alors Y commute avec tout élèment de G, et donc d'aprés 9.a)

$$Y = \frac{1}{n}Tr(Y)I_n = \frac{1}{n}\sum_{B\in G} Tr(B^{-1})Tr(B)I_n = \frac{|G|}{n}\dim(\mathcal{A}^{\widetilde{G}})I_n = \frac{|G|}{n}I_n.$$

10) On garde la notation Y jusqu'à la fin de cette partie. Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{|G|}}$.
On note : $Z_G = \{a_0\zeta^0 + a_1\zeta^1 + \ldots + a_{|G|-1}\zeta^{|G|-1} \;\; ; \;\; a_0, \ldots, a_{|G|-1} \in \mathbb{Z}\}$.
$Z_G[G]$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans Z_G, de matrices de G.

10.a) Posons $m = |G|$, Soit $B \in G$, alors $B^m = I_n$ et toute valeur propre de B est racine $m^{ème}$ de l'unité, or $Tr(B)$ est la somme de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités.
D'où : $Tr(B) \in Z_G$. Aussi puisque G est un groupe, $\forall B \in G$; $B^{-1} \in G$ et $Tr(B^{-1}) \in Z_G$.
Finalement : $Y = \sum_{B\in G} Tr(B^{-1})B \in Z_G[G]$.

10.b) On note $(C_k)_{1\le k\le |G|^2}$ les $|G|^2$ matrices $\zeta^i B$, où $1 \le i \le |G|$ et $B \in G$.
$YC_k = \zeta^i \sum_{B\in G} Tr(B^{-1})BZ$ avec $Z \in G$ et $C_k = \zeta^i Z$. selon la remarque de la question 9.b) on a :
$YC_k = \zeta^i \sum_{C\in G} Tr(ZC^{-1})C$. $\forall C \in G$; $ZC^{-1} \in G$ et selon la question précèdente : $Tr(ZC^{-1}) \in Z_G$.
Dons aussi : $\forall C \in G$; $\zeta^i Tr(ZC^{-1}) \in Z_G$. Alors : $YC_k \in Z_G[G]$.
Remarquons que tout élèment de $Z_G[G]$ est combinaison linéaire des matrices $(C_k)_{1\le k\le |G|^2}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
D'où : il existe dans $\mathbb{Z}$, des coefficients $(a_{i,j})_{1\le i,j\le |G|^2}$ tels que :
$\forall k \in [[1, |G|^2]] \quad ; \quad YC_k = \sum_{1\le l\le |G|^2} a_{l,k}C_l$.

10.c) On pose : $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le |G|^2}$ et $R = \frac{|G|}{n}I_{|G|^2} - A = (r_{i,j})_{1\le i,j\le |G|^2}$.
On a : $Y = \frac{|G|}{n}I_n$; alors selon la question précèdente :
$\forall k \in [[1, |G|^2]] \quad ; \quad \frac{|G|}{n}C_k = \sum_{1\le l\le |G|^2} a_{l,k}C_l$.

$$\forall k \in [[1, |G|^2]] \quad ; \quad \sum_{1\le l\le |G|^2} r_{l,k}C_l = 0. \text{ On peut écrire : } {}^tR\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{|G|^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \\ \vdots \\ 0_n\end{pmatrix}.$$

Si R était inversible, ${}^tR$ serait aussi inversible, en multipliant par l'inverse de ${}^tR$ à gauche, on aurait toutes les matrices C_k sont nulles, ce qui est absurde.
D'où R n'est pas inversible et $\det(R) = 0$.
10.d) D'aprés la question précèdente $\frac{|G|}{n}$ est valeur propre de A, donc racine de son polynôme caractéristique, qui est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ puisque A est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
Le coefficient dominant de ce polynôme caractéristique est $(-1)^{|G|^2}$ et son degré est $|G|^2$.
Notons χ_A le polynôme caractéristique de A, alors $Q = (-1)^{|G|^2}\chi_A$ est un polynôme unitaire de degré $|G|^2$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui admet $\frac{|G|}{n}$ comme racine.

Posons : $Q = X^{|G|^2} - \sum_{0 \le k \le |G|^2-1} \alpha_k X^k$. alors $\left(\frac{|G|}{n}\right)^{|G|^2} = \sum_{0 \le k \le |G|^2-1} \alpha_k \left(\frac{|G|}{n}\right)^k$

Soit $\frac{p}{q}$ un représentant irréductible de $\frac{|G|}{n}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
Alors : $|p|^{|G|^2} = \sum_{0 \le k \le |G|^2-1} \alpha_k |G|^k q^{|G|^2-k} = \sum_{1 \le k \le |G|^2} \alpha_k |G|^{|G|^2-k} q^k$; alors q divise $p^{|G|^2}$.
Mais puisque p et q sont premiers entre eux , q et $p^{|G|^2}$ sont aussi premiers entre eux.
D'où $q = 1$ et $\frac{|G|}{n} \in \mathbb{N}^*$. Finalement : n divse $|G|$.

IV] Une caractérisation de D_n, n impair

Soit G un sous groupe fini de $GL_2(\mathbb{C})$. Notons $<.,.>$ le produit scalaire hermitien usuel sur $\mathbb{C}^2$, et posons pour tout $v,w \in \mathbb{C}^2$; $< v,w >_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{B \in G} < B(v),B(w) >$.

11.a) Soient $v,w \in \mathbb{C}^2$; $< v,w >_0 = \overline{\frac{1}{|G|} \sum_{B \in G} < B(w),B(v) >} = \overline{< w,v >_0}$.

Pour $v \in \mathbb{C}^2$, La linéarité de $[w \mapsto < v,w >_0]$ provient du faite que chaque élèment B de G est linéaire et du faite que $[w \mapsto < B(v),w >]$ est linéaire.
Finalement : $< v,v >_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{B \in G} < B(v),B(v) > \ge 0$ et
$\left[< v,v >_0 = 0 \Rightarrow \forall B \in G \ ; < B(v),B(v) >= 0\right]$ et puisque $G \subset GL_2(\mathbb{C})$ alors $v = 0$.
D'où l'égalité : $< v,w >_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{B \in G} < B(v),B(w) >$ définit un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^2$.

Soient $B \in G$ et $v,w \in \mathbb{C}^2$. $< B(v),B(w) >_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{C \in G} < CB(v),CB(w) >$.

or d'aprés la remarque de 9.b) $G = \{CB \quad \text{tq} \quad C \in G\}$ et par suite :
$< B(v),B(w) >_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{C \in G} < C(v),C(w) >=< v,w >_0$.

11.b) On suppose que $\mathbb{C}^2$ n'est pas irréductible pour G, alors il existe un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$ stable par G, non nul et différent de $\mathbb{C}^2$, alors de dimension 1, puisque $\mathbb{C}^2$ est un plan.
Soient alors v un vecteur propre commun à tous les élèments de G et w un vecteur non nul de $\mathbb{C}^2$, orthogonal à v pour le produit scalaire hermitien $<.,.>_0$.
Soit $B \in G$, $B(v)$ est non nul colinéaire à v et d'aprés la question précèdente :
$< B(v),B(w) >_0 =< v,w >_0 = 0$ alors $B(w)$ est orthogonal à v et par suite colinéaire à w.
(v,w) est alors une base orthogonale de $\mathbb{C}^2$ pour le produit scalaire hermitien $<.,.>_0$.
cette base (v,w) diagonalise tous les élèments de G, alors $\forall B,C \in G$; $\begin{cases} BC(v) = CB(v) \\ BC(w) = CB(w) \end{cases}$.
C'est à dire : $\forall B,C \in G$; $BC = CB$. D'où G est commutatif.

12.a) On note $SL_2(\mathbb{C})$ le sous groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ des matrices de déterminant 1.
Soit $B \in SL_2(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = I_2$. B est alors diagonalisable et $sp(B) \subset \{-1,1\}$.
$\det(B) = 1$ est le produit des valeurs propres de B, alors $sp(B) = \{1\}$ ou $sp(B) = \{-1\}$.
D'où $B = I_2$ ou $B = -I_2$. La réciproque est évidente.
12.b) On suppose que $G \subset SL_2(\mathbb{C})$ et que G est non commutatif.
Par contraposée de 11.b) $\mathbb{C}^2$ est irréductible pour G, alors d'aprés 10.d) 2 divise $|G|$.
D'où $|G|$ est pair.
2 est un nombre premier qui divise $|G|$ alors G contient un élèment B d'ordre 2.
$B^2 = I_2$ et $B \neq I_2$ et $B \in SL_2(\mathbb{C})$ alors d'aprés la question précèdente : $B = -I_2$.
Finalement : $-I_2 \in G$.

On suppose par la suite que G est un sous groupe fini de $GL_2(\mathbb{C})$ ne contenant aucune homothétie autre que l'identité. On note : $G_0 = G \cap SL_2(\mathbb{C})$.

13.a) G_0 est un sous groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ et $G_0 \subset SL_2(\mathbb{C})$ et $-I_2 \notin G_0$, alors par contraposée de 12.b) G_0 est commutatif.
Alors d'aprés 1), tous les élèments de G_0 sont diagonalisables dans une même base de $\mathbb{C}^2$.
Autrement dit, il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que : $\forall B \in G_0 \;\; ; \;\; PBP^{-1}$ est diagonale.
$\forall B \in G_0 \;\; ; \;\; \det(B) = \det(PBP^{-1}) = 1$ alors $\forall B \in G_0 \;\; ; \;\; PBP^{-1}$ est de la forme : $diag(\lambda, \lambda^{-1})$
Notons : $\Gamma_0 = \{PBP^{-1} \quad tq \quad B \in G_0\}$.
Γ_0 est un sous groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ isomorphe à G_0 par : $[B \in G \mapsto PBP^{-1}]$.
13.b) Soient $m = |\Gamma_0|$, et $D = diag(\lambda, \lambda^{-1}) \in \Gamma_0$. $D^m = I_2$ alors $\lambda^m = 1$.
D'où $\Gamma_0 = \mathbf{Z}_m = \{diag(c^k, c^{-k}) \quad tq \quad 0 \leq k \leq m-1\}$ où $c = e^{\frac{2i\pi}{m}}$.
13.c) On suppose que $G_0 = \{I_2\}$.
$\det \;\; : G \longrightarrow \mathbb{C}$ est un morphisme de groupes de noyau réduit à $\{I_2\}$, donc injectif.
Notons $\nu = |G|$ et U le groupe des racines $\nu^{ème}$ de l'unité.
$\det \;\; : G \longrightarrow (\mathrm{U}, \times)$ est un isomrphisme de groupes, en plus $(\mathrm{U}, \times)$ est commutatif,
D'où G est commutatif.

On suppose dans les questions 14 et 15 que G n'est pas commutatif et que G_0 est exactement le groupe $\mathbf{Z}_m$.

14) Soit B_0 une matrice dans G qui n'est pas diagonale.
14.a) Soit $C \in \mathbf{Z}_m$. $\det(C) = \det(B_0 C B_0^{-1}) = 1$, alors $B_0 C B_0^{-1} \in G_0 = \mathbf{Z}_m$.
On garde les notations de 13.c). Posons : $B_0 = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$. $-I_2 \notin G_0 = \mathbf{Z}_m$ alors $m \geq 3$.
alors il existe $i \in [[0, m-1]]$ tel que : $c^i \neq c^{-i}$. $C = \begin{pmatrix} c^i & 0 \\ 0 & c^{-i} \end{pmatrix}$ ne peut pas commuter avec B_0 car B_0 n'est pas diagonale. Il existe alors $j \in [[0, m-1]]$ tel que : $c^i \neq c^j$ et
$B_0 C = C' B_0$ où $C' = \begin{pmatrix} c^j & 0 \\ 0 & c^{-j} \end{pmatrix}$. c'est à dire : $\begin{pmatrix} xc^i & zc^{-i} \\ yc^i & tc^{-i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xc^j & zc^j \\ yc^{-j} & tc^{-j} \end{pmatrix}$.
D'où $x = t = 0$ et B_0 est de la forme : $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{pmatrix}$.
14.b) $B_0^2 = \begin{pmatrix} bb' & 0 \\ 0 & bb' \end{pmatrix}$ est une homothétie de G, or I_2 est la seule homothétie que contient G, D'où $B_0^2 = I_2$ et $b' = b^{-1}$.
14.c) Soit φ_0 l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice B_0 dans la base canonique (e_1, e_2).
$(e_1, -b' e_2)$ est aussi une base de $\mathbb{C}^2$ et la matrice de φ_0 dans cette nouvelle base est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. La formule du changement de base s'écrit $QB_0Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $Q = diag(1, -b)$ est la matrice de passage de la nouvelle base à l'ancienne base.

15.a) Soit B une matrice diagonale dans G. Remarquons alors que $B = Q^{-1} B Q$.
Posons : $B = diag(\alpha, \beta)$, alors $BB_0 = Q^{-1} B Q Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Q = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} Q$.

$(BB_0)^2 = \alpha\beta I_2$ est une homothétie, or la seule homothétie que contient G est I_2. Donc $\alpha\beta = 1$.
Alors : $\det(B) = 1$ et par suite $B \in G_0 = \mathbf{Z}_m$.
15.b) On définit sur G la relation binaire : $B\mathbf{S}B' \Leftrightarrow B'B^{-1} \in G_0 = \mathbf{Z}_m$.
$\mathbf{S}$ est une relation d'équivalence sur G, et toutes les classes d'équivalence sont de même cardinal égal à $m = |\mathbf{Z}_m|$. En effet : si $B \in G$; la classe d'équivalence de B est $\mathbf{Z}_m B$.
Soient $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_1^{-1} & \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ b_2^{-1} & \end{pmatrix}$ deux élèments non diagonaux de G.
$B_1B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_1^{-1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ b_2^{-1} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1b_2^{-1} & 0 \\ 0 & b_1^{-1}b_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}_m$. (D'aprés 15.a))
G est différent de $\mathbf{Z}_m$ car $\mathbf{Z}_m$ est commutatif et G ne l'est pas.
On déduit alors que La relation d'équivalence $\mathbf{S}$ admet exactement deux classes d'équivalence et le cardinal de G est $2m$.
L'application $[B \mapsto QBQ^{-1}]$ réalise un isomorphisme de groupes entre G et un groupe D'_m.
D'_m contient les matrices $\begin{pmatrix} c^k & 0 \\ 0 & c^{-k} \end{pmatrix}$ pour $0 \leq k \leq m-1$ et $c = e^{\frac{2i\pi}{m}}$.
D'_m contient aussi les matrices $\begin{pmatrix} c^k & 0 \\ 0 & c^{-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c^k \\ -c^{-k} & 0 \end{pmatrix}$.
Alors $D_m \subset D'_m$, de plus D_m et D'_m sont finis de même cardinal, alors $D_m = D'_m$.

16) Soit G un sous groupe fini commutatif de $GL_2(\mathbb{C})$ qui ne contient pas d'homothétie autre que l'identité.
16.a) D'aprés 1) tous les élèments de G sont diagonalisables dans une même base de $\mathbb{C}^2$.
Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que : $\forall B \in G$; $P^{-1}BP$ est diagonale.
Posons alors : $\forall B \in G$; $B = P\begin{pmatrix} \chi_1(B) & 0 \\ 0 & \chi_2(B) \end{pmatrix}P^{-1}$.
G un sous groupe $GL_2(\mathbb{C})$, alors χ_1 et χ_2 sont à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. $\forall B, C \in G$; $BC \in G$
et donc : $BC = P\begin{pmatrix} \chi_1(BC) & 0 \\ 0 & \chi_2(BC) \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} \chi_1(B)\chi_1(C) & 0 \\ 0 & \chi_2(B)\chi_2(C) \end{pmatrix}P^{-1}$.
D'où $\forall B, C \in G$; $\chi_1(BC) = \chi_1(B)\chi_1(C)$ et $\chi_2(BC) = \chi_2(B)\chi_2(C)$.
χ_1 et χ_2 sont alors des morphismes de groupes de G vers $\mathbb{C}^*$.
16.b) $\forall B \in G$; $B^{|G|} = I_2$ alors $\chi_1(B)^{|G|} = \chi_2(B)^{|G|} = 1$ alors d'aprés 16.a) on déduit que :
$[B \mapsto \chi_1(B)\chi_2(B)^{-1}]$ est un morphisme de groupes de G vers le groupes des racines $|G|^{\grave{e}mes}$ de l'unité. Ces deux groupes sont de même cardinal égal à $|G|$.
Pour conclure, Il reste à vérifier que l'application $[\chi : B \in G \mapsto \chi_1(B)\chi_2(B)^{-1}]$ est injective.
On montre alors que $\ker(\chi) = \{I_2\}$.
$B \in \ker(\chi) \Rightarrow \chi(B) = 1 \Rightarrow \chi_1(B) = \chi_2(B) \Rightarrow B$ est une homothétie.
Puisque La seule homothétie que contient G est I_2 ; on déduit : $\ker(\chi) = \{I_2\}$.
16.c) D'aprés les résultats de 16.b), G est isomorphe à un groupe cyclique, alors G est aussi cyclique. Soit $B = P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}$ un générateur de G. c et d sont des racines $|G|^{\grave{e}mes}$ de l'unité, alors il existe des entiers p et q tels que : $c = e^{\frac{2ip\pi}{|G|}}$ et $d = e^{\frac{2iq\pi}{|G|}}$.
$\chi(B) = \chi_1(B)\chi_2(B)^{-1} = e^{\frac{2i(p-q)\pi}{|G|}}$ est un générateur du groupe des racines $|G|^{\grave{e}mes}$ de l'unité.
$e^{\frac{2i\pi}{|G|}}$ est aussi un générateur du groupe des racines $|G|^{\grave{e}mes}$ de l'unité qui est de cardinal $|G|$.

D'où $(p-q)$ est premier avec $|G|$.

G est cyclique de cardinal $|G|$ engendré par $B = P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}$, alors G est l'ensemble des matrices $B = P\begin{pmatrix} c^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $0 \leq k \leq |G|-1$.

17) D'aprés 16) les sous groupes finis commutatifs de $GL_2(\mathbb{C})$ ne contenant pas d'homothétie autre que I_2 sont cycliques et plus précisément sont ceux de la forme :

$$G_{P,h,p,q} = \left\{ P\begin{pmatrix} c^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix}P^{-1} \quad \text{tq} \quad 0 \leq k \leq h-1 \right\}$$

avec $h \in \mathbb{N}^*$; $P \in GL_2(\mathbb{C})$; $p, q \in \mathbb{N}$ tous donnés tels que : $(p-q)$ est premier avec h,
et $c = e^{\frac{2ip\pi}{h}}$; $d = e^{\frac{2iq\pi}{h}}$.
NB : $|G_{P,h,p,q}| = h$.
Remarquons que parmis les sous groupes Dn, les seuls qui sont commutatifs sont D_1 et D_2.
On déduit alors d'aprés 15.b) que les sous groupes finis non commutatifs de $GL_2(\mathbb{C})$ ne contenant pas d'homothétie autre que I_2 sont ceux de la forme :
$Q^{-1}D_mQ = \{Q^{-1}BQ \quad \text{tq} \quad B \in D_m\}$ avec m un entier ≥ 3.

18) Par l'absurde, supposons que $GL_2(\mathbb{C})$ admet un sous groupe G isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
alors G est commutatif d'ordre 8 et $\forall B \in G$; $B^2 = I_2$ et $\det(B) = \pm 1$.
D'aprés 12.a) Les seuls élèments possibles B de G tels que : $\det(B) = 1$ sont I_2 et $-I_2$.
Alors G contient au moins six élèments de déterminant égal à -1.
Soient $B_1, B_2, \ldots, B_6$ ces six élèments.
$B_1B_6, B_2B_6, \ldots, B_5B_6$ sont 5 élèments distincts de G tous de determinant égal à 1.