Complété d'un Espace Métrique

Soit (E,d) un espace métrique ; on appelle complété de E un espace métrique $(\mathcal{E},\delta)$ contenant E, dont la distance δ prolonge celle de E , qui est complet pour cette distance, et qui est le plus petit espace métrique contenant E à posséder cette propriété.

Dans le cas où (E,d) est plongé dans un espace métrique complet (F,δ) (δ prolongeant d), alors son complété est tout simplement l'adhérence $\bar{E}$ de E dans F , muni de la distance induite par δ .

En effet, un sous-espace de (F,δ) est complet si et seulement si il est fermé ; tout sous-espace complet contenant E est fermé, donc contient $\bar{E}$ qui apparaît bien comme le plus petit d'entre eux.

Exemples :

1) $F=\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ sup|u_n|<\infty\}$ espace vectoriel des suites de réels bornées, muni de la norme sup ; E =sev des suites nulles à partir d'un certain rang ; $\mathcal{E}=\bar{E}=$ sev des suites nulles à l'infini (ie tendant vers zéro)
2) F = espace vectoriel des fonctions en escalier sur $[a,b]$, muni de la norme sup ; $\mathcal{E}=$ espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$
3) F = espace vectoriel des fonctions en escalier sur $[a,b]$, muni de la norme $\int_a^b|f|$; $\mathcal{E}=$ espace vectoriel des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$

On va maintenant décrire deux méthodes pour construire le complété de (E,d) .

Première Méthode : à l'aide de classes de suites de Cauchy

Si $(x_n),(y_n)$ sont deux suites de Cauchy de points de E on dit que $(x_n),(y_n)$ sont équivalentes si et seulement si la suite $d(x_n,y_n)$ converge vers zéro dans $\mathbb{R}$ (ou dans un evn, $(x_n-y_n)\longrightarrow 0$ dans E)
Les classes d'équivalence seront les points de notre complété $\mathcal{E}$. On définit un plongement naturel de E dans $\mathcal{E}$ en identifiant un point de E avec la classe de la suite stationnaire à ce point.

(Dans le cas d'un evn, la relation d'équivalence ainsi définie est compatible avec l'addition et avec la multiplication par un scalaire, et $\mathcal{E}$ sera donc un espace vectoriel)

On va montrer successivement :

(i) $\mathcal{E}$ peut être muni d'une distance qui prolonge celle de E
(ii) pour cette topologie, E est dense dans $\mathcal{E}$
(iii) $\mathcal{E}$ est complet

(i) Soient $\tilde{x},\tilde{y}$ deux points de $\mathcal{E}$, ce sont les classes des suites de Cauchy $x=(x_n),y=(y_n)$; montrons que la suite $d(x_n,y_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$:

$$|d(x_{n+p},y_{n+p})-d(x_n,y_n)|\leq\left(d(x_{n+p},x_n)+d(y_{n+p},y_n)\right)\to 0\ quand\ n\to\infty, uniformément\ en\ p$$

On peut donc définir $\delta(\tilde{x},\tilde{y})=lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$; cette définition est bien cohérente, car elle ne dépend pas du choix des représentants x,y pour $\tilde{x},\tilde{y}$ comme on le vérifie facilement ; on vérifiera également que δ satisfait les axiomes d'une distance.

(ii) Soit $x=(x_n)$ une suite représentant le point $\tilde{x}$ de $\mathcal{E}$, et soit $\widetilde{x_n}$ la suite stationnaire à la valeur x_n , montrons que $\widetilde{x_n}$ converge vers $\tilde{x}$ dans $(\mathcal{E},\delta)$

$\delta(\widetilde{x_n}, \tilde{x}) = lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m)$; comme (x_n) est une suite de Cauchy, on a $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ dès que $n > n_0(\varepsilon)$ et $\forall m > n$; on en déduit en passant à la limite quand m tend vers l'infini :

$\delta(\widetilde{x_n}, \tilde{x}) \leq \varepsilon$ dès que $n > n_0(\varepsilon)$, cqfd.

(iii) Soit maintenant $\tilde{x}^{(k)}$ une suite de Cauchy de points de $\mathcal{E}$:

$$\delta\left(\tilde{x}^{(k)}, \tilde{x}^{(k+l)}\right) = lim_{n\to\infty} d(x_n^{(k)}, x_n^{(k+l)}) < \varepsilon \text{ dès que } k > k_0(\varepsilon) \ , \ \forall l \in \mathbb{N}$$

On sait d'après (ii) que chaque $\tilde{x}^{(k)}$ est approché par un point de E , soit $\widetilde{y_k}$ (suite stationnaire à la valeur y_k), mettons à 2^{-k} près : $\delta\left(\tilde{x}^{(k)}, \widetilde{y_k}\right) < 2^{-k}$; alors la suite (y_k) est de Cauchy dans E , en effet : $d(y_k, y_{k+l}) = \delta(\widetilde{y_k}, \widetilde{y_{k+l}}) \leq 2^{-k} + 2^{-(k+l)} + \delta\left(\tilde{x}^{(k)}, \tilde{x}^{(k+l)}\right)$ et $\tilde{x}^{(k)}$ est supposée de Cauchy dans $\mathcal{E}$.

Soit $\tilde{y}$ le point de $\mathcal{E}$ dont (y_k) est un représentant ; alors $\tilde{y}$ est la limite dans $\mathcal{E}$ de la suite $\tilde{x}^{(k)}$; en effet : $\delta\left(\tilde{x}^{(k)}, \tilde{y}\right) \leq \delta\left(\tilde{x}^{(k)}, \widetilde{y_k}\right) + \delta(\widetilde{y_k}, \tilde{y}) \leq 2^{-k} + \delta(\widetilde{y_k}, \tilde{y})$; et $\delta(\widetilde{y_k}, \tilde{y})$ tend vers zéro d'après (ii).

Le cas particulier de la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$

Cette méthode doit être adaptée, puisqu'elle repose en (i) sur $\delta(\tilde{x}, \tilde{y}) = lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$, limite d'une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$! Autrement dit, il est difficile de parler de $\mathbb{R}$, ou même de $\mathbb{Q}$, en tant qu'espaces métriques, tant que $\mathbb{R}$ n'a pas été construit.

Cependant, dans le cas de $\mathbb{R}$**,** on dispose d'une alternative pour définir la topologie de $\mathbb{R}$ comme complété de $\mathbb{Q}$: il suffit de définir sur le complété un ordre total, qui prolonge celui de $\mathbb{Q}$; à cet ordre est associé une valeur absolue $|\tilde{x}| = \max(0, \tilde{x})$, et $\delta(\tilde{x}, \tilde{y})$ pourra alors se définir comme $|\tilde{x} - \tilde{y}|$ (on a déjà noté que la structure d'espace vectoriel était conservée sur le complété).

L'idée est la suivante : soit $\tilde{x}$ un point de $\mathcal{E} = \overline{\mathbb{Q}}$ qui n'est pas zéro (c'est-à-dire qui n'est pas la classe d'une suite tendant vers zéro) ; on peut montrer qu'une suite $x = (x_n)$ représentant $\tilde{x}$ possède la propriété suivante : à partir d'un certain rang, les x_n sont de signe constant, et plus précisément à une distance au point zéro supérieure à une constante rationnelle fixée a : par exemple, dans le cas positif, on aura $x_n > a > 0$ à partir d'un certain rang (lemme de distance minimale).

(Pour montrer cela, on procède par l'absurde, en constatant qu'une suite de Cauchy qui n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang est nécessairement convergente vers zéro, puis en constatant qu'il en va de même d'une suite qui ne se tient pas à une distance minimale fixée de zéro).

De plus, tous les représentants de $\tilde{x}$ sont de même signe constant à partir d'un certain rang (cela découle du lemme de distance minimale, et de la définition d'une classe « à une suite tendant vers zéro près »). Ce signe définit donc la relation $\tilde{x} > 0$ ou $\tilde{x} < 0$ vérifiée par $\tilde{x}$, dont on montre qu'elle est compatible avec l'addition, ou avec la multiplication par un $\tilde{y} > 0$. On étend cette relation d'ordre strict à tous les couples $(\tilde{x}, \tilde{y})$ par $\tilde{x} > \tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{x} - \tilde{y} > 0$, et on l'étend à un ordre large, total par construction, par $\tilde{x} \geq \tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{x} > \tilde{y}\ ou\ \tilde{x} = \tilde{y}$.

$\mathcal{E}$ étant ainsi muni d'un ordre total, on peut montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathcal{E}$ dans le sens suivant : $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{E}\ avec\ \tilde{x} < \tilde{y} \quad \exists z = \tilde{z} \in \mathbb{Q}\ tq\ \tilde{x} < z < \tilde{y}$ (on peut se ramener à $\tilde{x} = 0$, et utiliser le lemme de distance minimale ; dans le cas général, étant donné $z \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < z < \tilde{y} - \tilde{x}$, considérer les $nz, n \in \mathbb{N}$ et le plus petit d'entre eux qui soit supérieur à $\tilde{x}$, et montrer qu'il est compris entre $\tilde{x}, \tilde{y}$) ;

ce qui démontre (ii) ; le raisonnement pour montrer (iii) reste inchangé.

Deuxième Méthode : à l'aide de fonctions distance

A chaque point x de E on associe la fonction $D_x : z \to d(x,z)$; on définit ainsi une application $\phi : x \to D_x$ de E dans $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$, qui est un espace vectoriel, muni de la topologie associée à l'écart :

$$e(f,g) = sup_{z\in E}|f(z) - g(z)|$$

(un écart vérifie les mêmes axiomes qu'une distance, mais peut prendre la valeur $+\infty$; cette topologie est celle de la convergence uniforme)

L'application ϕ est injective : $D_x = D_y \Longrightarrow D_x(y) = d(x,y) = D_y(y) = 0 \Longrightarrow x = y$;

C'est même une isométrie de E dans $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$, en effet :

$d(x,y) \leq e\left(D_x, D_y\right) = sup_{z\in E}|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ d'où $e\left(D_x, D_y\right) = d(x,y)$

(la première inégalité s'obtient en prenant $z = y$, la seconde par inégalité triangulaire)

Mais on sait bien que $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ est complet (ainsi plus généralement que $\mathcal{F}(E,F)$, où F est un espace métrique complet), vérifions cette propriété :

> *Si (g_n) est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$, alors*
>
> $sup_{z\in E}\left|g_n - g_{n+p}\right| < \varepsilon$ *dès que* $n > N(\varepsilon)$ *, d'où en particulier en un point z fixé de* E
>
> $\left|g_n(z) - g_{n+p}(z)\right| < \varepsilon$ *dès que* $n > N(\varepsilon)$ *; la suite $g_n(z)$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$, d'où on déduit que (g_n) converge simplement (en chaque point z) vers une limite $g \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$, montrons que la convergence est uniforme ;*
>
> *la majoration $\left|g_n(z) - g_{n+p}(z)\right| < \varepsilon$ dès que $n > N(\varepsilon)$ est uniforme par rapport à $z \in E$, en faisant tendre p vers l'infini on en déduit $|g_n(z) - g(z)| \leq \varepsilon$ dès que $n > N(\varepsilon)$, toujours uniformément en z, soit $sup_{z\in E}|g_n - g| < \varepsilon$ dès que $n > N(\varepsilon)$, cqfd.*

Dans ces conditions, si on considère le plongement isométrique $\phi(E)$ de E dans $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$, le complété de E (identifié à $\phi(E)$) n'est autre que l'adhérence $\overline{\phi(E)}$ de $\phi(E)$ dans $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$.

Cette construction est un peu plus abstraite que la précédente, mais remarquablement efficace.