Etudier la suite définie par la relation $x_{n+p+1} = \sqrt[p]{x_{n+1} \dots x_{n+p}}$ et par p termes positifs donnés $x_1, \dots, x_p$

On se ramène à étudier la suite $\alpha_n = \ln(x_n)$; cette suite est définie par les p termes réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et par la relation de récurrence linéaire d'ordre p : $\alpha_{n+p+1} = \frac{1}{p}(\alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p})$ qui définit chaque terme de la suite comme la moyenne mobile des p termes précédents.

Posons $\lambda_{n+1} = min(\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{n+p})$, $\mu_{n+1} = max(\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{n+p})$, $\delta_{n+1} = \mu_{n+1} - \lambda_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Du fait que l'on a : $\lambda_{n+1} \leq \alpha_{n+p+1} \leq \mu_{n+1}$, et que pour passer de λ_{n+1} à λ_{n+2} , on remplace α_{n+1} par α_{n+p+1} sous le symbole min ; il est clair que $\lambda_{n+1} \leq \lambda_{n+2}$, avec inégalité stricte si $\alpha_{n+1} = \lambda_{n+1}$ et $\lambda_{n+1} < \mu_{n+1}$, ou égalité dans le cas contraire. Autrement dit, δ_{n+1} est une suite croissante, et de même μ_{n+1} est une suite décroissante.

On va montrer que leur différence δ_{n+1} tend en décroissant vers zéro, ainsi les deux suites λ_{n+1}, μ_{n+1} seront adjacentes, ce qui prouvera la convergence de α_n.

Dans le cas contraire, on aurait : $(*)\ \delta_{n+1} \geq \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$; on va montrer par l'absurde que cela n'est pas possible. On commence par établir les inégalités :

$$\alpha_{n+p+1} \geq \frac{1}{p}\mu_{n+1} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\lambda_{n+1} = \lambda_{n+1} + \frac{1}{p}\delta_{n+1} \geq \lambda_{n+1} + \frac{1}{p}\delta$$

$$\alpha_{n+p+1} \leq \frac{1}{p}\lambda_{n+1} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\mu_{n+1} = \mu_{n+1} - \frac{1}{p}\delta_{n+1} \leq \mu_{n+1} - \frac{1}{p}\delta$$

Ces inégalités résultent du fait que dans le calcul de α_{n+p+1} comme moyenne des p nombres $(\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{n+p})$, l'un de ces nombres est égal à μ_{n+1} (resp. λ_{n+1}), tandis que les $p-1$ autres nombres sont supérieurs ou égaux à λ_{n+1} (resp. inférieurs ou égaux à μ_{n+1}).

De même, on aura :

$$\forall k = 1, \dots, p \quad \alpha_{n+p+k} \geq \lambda_{n+k} + \frac{1}{p}\delta \geq \lambda_{n+1} + \frac{1}{p}\delta \;\; et \;\; \alpha_{n+p+k} \leq \mu_{n+k} - \frac{1}{p}\delta \leq \mu_{n+1} - \frac{1}{p}\delta$$

On en déduit : $\lambda_{n+p+1} = min(\alpha_{n+p+1}, \dots, \alpha_{n+2p}) \geq \lambda_{n+1} + \frac{1}{p}\delta \;\; et \;\; de\, même \;\; \mu_{n+p+1} \leq \mu_{n+1} - \frac{1}{p}\delta$;

D'où $\delta_{n+p+1} \leq \delta_{n+1} - \frac{2}{p}\delta$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de travail :

$(*)\ \delta_{n+1} \geq \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ faite au départ du raisonnement sur la suite δ_{n+1}.

On en conclut que δ_{n+1} tend vers zéro, que les deux suites λ_{n+1}, μ_{n+1} sont adjacentes, et que la suite α_n est convergente, de même que la suite $x_n = exp(\alpha_n)$ que l'on se proposait d'étudier.