Des Suites en Itération de la Racine Carrée

$$u_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}} \quad (avec \;\; a > 0)$$

On pourrait traiter cet exercice sous la forme : $u_{n+1} = f(u_n) \;\; avec \;\; f(x) = \sqrt{a + x}$

Mais il est plus adroit de partir de la relation $(u_{n+1})^2 = a + u_n$, qui fournit implicitement u_{n+1} à partir de u_n. Le discriminant de l'équation $x^2 - x - a = 0$ étant positif, il existe deux racines, de signes opposés (leur produit vaut $-a$) : $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 + 4a})$. Appelons α la racine positive, seul point fixe de la relation pouvant être limite de la suite (u_n) (on sait, d'après un argument de continuité, que la limite si elle existe est toujours un point fixe)

On peut écrire, par différence, à partir des relations : $(u_{n+1})^2 = a + u_n$, $(u_n)^2 = a + u_{n-1}$, $\alpha^2 = a + \alpha$, les égalités suivantes :

$$(u_{n+1})^2 - (u_n)^2 = (u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = u_n - u_{n-1} \qquad (avec\; u_{n+1} + u_n > 0\,)$$

$$(u_{n+1})^2 - \alpha^2 = (\,u_{n+1} - \alpha)(u_{n+1} + \alpha) = u_n - \alpha \qquad (avec\; u_{n+1} + \alpha > 0\,)$$

La première égalité montre que les différences $(u_{n+1} - u_n)$ et $(u_n - u_{n-1})$ sont de même signe, d'où on déduit que la suite (u_n) est monotone ; la deuxième montre que u_n est toujours situé d'un même côté de α quel que soit n.

Plus précisément, pour tout x positif, on a : $f(x) > x \Leftrightarrow x^2 - x - a < 0 \Leftrightarrow x < \alpha$

Par conséquent, si on considère le premier terme de la suite (u_n) : $u_1 = \sqrt{a} < \alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a})$, on aura $u_2 = f(u_1) > u_1$; par conséquent la suite (u_n) est strictement croissante, et majorée par α, on en conclut qu'elle est convergente, et que sa limite vaut α.

$$v_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}} \quad (avec \;\; (a_n) \;\; suite\ de\ réels\ positifs)$$

Supposons d'abord que la suite (a_n) est majorée par une constante positive a ; alors la suite (v_n) est majorée par la suite (u_n) étudiée précédemment, de plus il est facile de montrer que (v_n) est croissante.

En effet, posons $\varphi_a(x) = \sqrt{a + x}$, qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors :

$v_n = \varphi_{a_1} \circ \varphi_{a_2} \circ \ldots \varphi_{a_n}(0)$, $v_{n+1} = \varphi_{a_1} \circ \varphi_{a_2} \circ \ldots \varphi_{a_n}(\sqrt{a_{n+1}})$; or la fonction $\varphi_{a_1} \circ \varphi_{a_2} \circ \ldots \varphi_{a_n}$ est croissante, en tant que composée de fonctions croissantes, d'où $v_{n+1} \geq v_n$; on en conclut que (v_n) est convergente.

Supposons maintenant que la suite (a_n) vérifie la majoration : $a_n \leq a \times \omega^{2^n}$, alors on montre que $v_n \leq \omega \times \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}} = \omega \times u_n \leq \omega\alpha$; on en conclut là aussi que (v_n) est convergente.

$$\boxed{u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}}$$

1[ère] méthode : la suite arithmétique $a_n = n$ vérifie la majoration $a_n \leq 2^n$; la suite (u_n) est donc convergente d'après l'étude précédente.

2[ème] méthode : On se propose de montrer successivement les majorations suivantes

$(u_{n+1})^2 \leq 1 + u_n\sqrt{2}$; $u_{n+1} - u_n \leq \frac{\sqrt{n+1}}{2^n\sqrt{n!}}$; pour en déduire non seulement la convergence de la suite, mais aussi une estimation de sa vitesse de convergence.

Revenons à la formulation de la question précédente, soient $v_n = \sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_n}}}$ la suite associée à (a_n), et $w_n = \sqrt{b_1+\sqrt{b_2+\cdots+\sqrt{b_n}}}$ associée à (b_n), avec $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n < b_n$; alors on peut montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < v_n < w_n$, en effet : $a < b \implies \varphi_a(x) < \varphi_b(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}^+$, d'où $v_n = \varphi_{a_1} \circ \varphi_{a_2} \circ \ldots \varphi_{a_n}(0) < w_n = \varphi_{b_1} \circ \varphi_{b_2} \circ \ldots \varphi_{b_n}(0)$ par compositions successives.

Ecrivons alors $(u_{n+1})^2 = 1 + \sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n+1}}} = 1+\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{4}{2^2}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{2^{n-1}}}}}}\right)$

Par majoration terme à terme : $(u_{n+1})^2 < 1+\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}\right) = 1+u_n\sqrt{2}$

Soit alors α la plus grande des deux racines de l'équation $x^2 - x\sqrt{2} - 1 = 0$,

on vérifie $u_1 = 1 < \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3})$,

puis par récurrence : $u_n < \alpha \implies (u_{n+1})^2 = 1 + u_n\sqrt{2} < 1 + \alpha\sqrt{2} = \alpha^2 \implies u_{n+1} < \alpha$

La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.

Posons $u_{n,p} = \sqrt{p+\sqrt{(p+1)+\cdots+\sqrt{n}}}$; $u_n = u_{n,1}$; alors on peut écrire successivement :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_{n+1})^2-(u_n)^2}{u_{n+1}+u_n} \leq \frac{\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n+1}}}-\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}{2u_n} = \frac{u_{n+1,2}-u_{n,2}}{2u_{n,1}}$$

$$\leq \frac{(u_{n+1,2})^2-(u_{n,2})^2}{4u_{n,1}u_{n,2}} = \frac{u_{n+1,3}-u_{n,3}}{4u_{n,1}u_{n,2}}$$

$$\leq \cdots \leq \frac{1}{2^n}\frac{(u_{n+1,n})^2-(u_{n,1})^2}{u_{n,1}u_{n,2}\ldots u_{n,n}} = \frac{1}{2^n}\frac{n+\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{1}\sqrt{2}\ldots\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n\sqrt{n!}}\text{, cqfd.}$$

Posons $\theta_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n!}}$; $\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} = \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n}}$; $\frac{\theta_{n+k}}{\theta_n} = \prod_{j=n}^{n+k-1} \frac{\theta_{j+1}}{\theta_j} < \prod_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{\sqrt{j}} < \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k$

d'où $\quad |u_{n+p+1} - u_n| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |u_{k+1} - u_k| < \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k} \theta_{n+k} < \frac{\theta_n}{2^n} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k$

On en conclut : $|u_{n+p+1} - u_n| < \frac{\sqrt{n+1}}{2^n \sqrt{n!}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n \sqrt{n!} - 2^{n-1} \sqrt{(n-1)!}} < \frac{\sqrt{n+1}}{2^n \sqrt{n!}}$

Cette majoration de Cauchy peut servir, en passant à la limite quand $p \longrightarrow \infty$, à calculer une estimation du rang à partir duquel l'écart de u_n à sa limite est inférieur à une valeur donnée.