La Cardioïde selon différentes définitions géométriques

Sur la Figure ci-dessous, issue d'une animation Maple, on a représenté la Cardioïde à la fois :

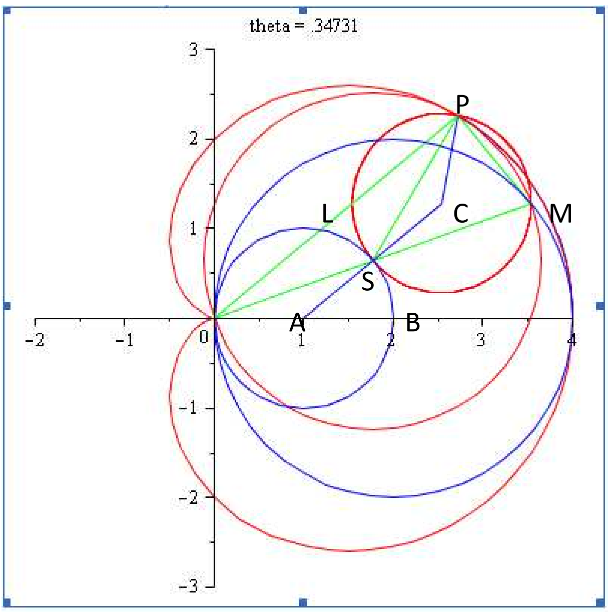
a) comme épicycloïde : le cercle mobile $\mathcal{C}(C,1)$ roule sans glisser sur le cercle fixe $\mathcal{C}(A,1)$; le point de contact S forme depuis le centre A avec l'axe (Ox) l'angle 2θ ; le point courant P , initialement sur (Ox), du cercle $\mathcal{C}(C,1)$ décrit la cardioïde, dont les équations paramétrées s'écrivent
$$\begin{cases} x = 1 + 2cos2\theta + cos4\theta \\ y = 2sin2\theta + sin4\theta \end{cases}$$

b) comme conchoïde du cercle $\mathcal{C}(A,1)$: sur le rayon vecteur issu de O, d'angle θ avec (Ox) , qui coupe le cercle $\mathcal{C}(A,1)$ au point L, on reporte une longueur égale à son diamètre, soit $LP = 2$

c) comme podaire du cercle $\mathcal{C}(B,2)$: sur la tangente au point M à ce cercle, on abaisse la perpendiculaire issue de O, ce qui détermine le point P

d) comme enveloppe d'une famille de cercles, les cercles de centre S et de diamètre $[O,M]$

1) Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$, celles du vecteur $\overrightarrow{CP}$, et retrouver les équations du a)
2) Ecrire l'équation polaire de la cardioïde comme conchoïde, et retrouver les équations du a)
3) Montrer par un raisonnement sur les angles et les longueurs des vecteurs $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{CP}$ que $(ALPC)$ est un parallélogramme, en déduire la définition b) à partir de la définition a)
4) Montrer que le triangle (SMP) est isocèle ; en déduire que le triangle (OMP) est rectangle en P, retrouver ainsi la définition c)
5) Prouver géométriquement que l'angle $(Ox,\overrightarrow{SP})$ vaut 3θ
6) Dériver les équations paramétrées du a) et en déduire que la tangente à la cardioïde forme l'angle $3\theta + \frac{\pi}{2}$ avec (Ox)
7) Retrouver ce résultat par un raisonnement cinématique dans la définition a)
8) Retrouver aussi ce résultat à partir de l'équation polaire de la cardioïde dans la définition b)
9) En déduire que la cardioïde et le cercle de diamètre $[O,M]$ ont au point P une tangente commune
10) Ecrire les équations paramétrées de la famille des cercles de d), et montrer par le calcul le résultat du 9)



1) Le vecteur $\overrightarrow{AC}$, qui forme avec (Ox) l'angle 2θ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2cos2\theta \\ 2sin2\theta \end{pmatrix}$, le vecteur $\overrightarrow{CP}$ qui forme avec $\overrightarrow{AC}$ l'angle 2θ , et avec (Ox) l'angle 4θ , a pour coordonnées $\begin{pmatrix} cos4\theta \\ sin4\theta \end{pmatrix}$; On en déduit les coordonnées du point $P = A + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$, ce qui donne les équations du a).

2) Cette équation polaire, avec le pôle en O, et (Ox) comme axe $\theta = 0$, s'écrit : $\rho = 2(1 + cos2\theta)$ (en effet $\rho = OP = OL + LP \quad avec \ OL = 2cos2\theta \ \ et \ LP = 2$)
On en déduit $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix} 2cos2\theta(1 + cos2\theta) \\ 2sin2\theta(1 + cos2\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2cos2\theta + 1 + cos4\theta \\ 2sin2\theta + sin4\theta \end{pmatrix}$; ce sont bien les équations du a).

3) $(Ox, \overrightarrow{AL}) = (Ox, \overrightarrow{CP}) = 4\theta \ \ et \ AL = CP = 1$; on en déduit $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{CP}$, $(ALPC)$ est bien un parallélogramme ; on en déduit $\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{AC}$, d'où $LP = AC = 2$; la définition b) de la cardioïde comme conchoïde en découle.

4) $(Ox, \overrightarrow{SC}) = (Ox, \overrightarrow{AC}) = 2\theta$; $(Ox, \overrightarrow{OM}) = \theta$ d'où $(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC}) = (Ox, \overrightarrow{SC}) - (Ox, \overrightarrow{OM}) = \theta$; de plus dans le triangle isocèle (CSP) on a $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SP}) = (\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PC})$ et aussi :

$2(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SP}) = \pi - (\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CS}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CP}) = 2\theta$ d'où on conclut $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SP}) = \theta = (\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC})$; le triangle (SMP) est donc isocèle en , ce qui donne les égalités $SP = SM = \frac{1}{2}OM$; il en résulte, d'après le théorème de la médiane, que (OMP) est rectangle en P .

Le point P apparaît donc bien comme le pied de la perpendiculaire menée de O sur la tangente (MP) au cercle $(B, 2)$, ce qui donne la définition c) de la cardioïde comme podaire de ce cercle.

5) $(Ox, \overrightarrow{SP}) = (Ox, \overrightarrow{SC}) + (\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SP}) = 2\theta + \theta = 3\theta$

6) $\frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial \theta}\begin{pmatrix} -4sin2\theta - 4sin4\theta \\ 4cos2\theta + 4cos4\theta \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} -cos\theta sin3\theta \\ cos\theta cos3\theta \end{pmatrix} = 8cos\theta\begin{pmatrix} \cos\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$

7) $\frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial \theta} = \frac{\overrightarrow{\partial C}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta}(\overrightarrow{CP})$; le point C tourne autour de A : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2cos2\theta \\ 2sin2\theta \end{pmatrix}$; $\left(Ox, \frac{\overrightarrow{\partial C}}{\partial \theta}\right) = 2\theta + \frac{\pi}{2}$

le vecteur $\overrightarrow{CP}\begin{pmatrix} cos4\theta \\ sin4\theta \end{pmatrix}$ tourne également, à une vitesse angulaire double, avec $\left(Ox, \frac{\partial}{\partial \theta}(\overrightarrow{CP})\right) = 4\theta + \frac{\pi}{2}$; comme $AC = 2$ et $CP = 1$, les vitesses $\frac{\overrightarrow{\partial C}}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}(\overrightarrow{CP})$ sont de norme égale ; il en résulte $\left(Ox, \frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial \theta}\right) = 3\theta + \frac{\pi}{2}$ ($\frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial \theta}$ est porté par la bissectrice intérieure de $\frac{\overrightarrow{\partial C}}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}(\overrightarrow{CP})$)

8) On écrit $\overrightarrow{OP} = \rho\vec{u} = (\rho_L + 2)\vec{u}$ d'où $\frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho_L\vec{u}) + 2\vec{v} = 2(\vec{t} + \vec{v})$; en effet

- Le système de coordonnées polaires se décrit comme suit : $\vec{u}\begin{pmatrix} cos\varphi \\ sin\varphi \end{pmatrix}$ est le rayon vecteur unitaire, et $\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{d\varphi}$ le vecteur unitaire directement normal à $\vec{u}$, avec $\varphi = 2\theta = angle\ polaire$;

- Le mouvement de rotation du point L autour de A se décrit par : $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}cos2\varphi\\ sin2\varphi\end{pmatrix}$

  d'où $\frac{\overrightarrow{\partial L}}{\partial \varphi}=2\vec{t}$, $\vec{t}$ étant le vecteur tangent unitaire en L au cercle $\mathcal{C}(A,1)$;

  On retrouve le même résultat que précédemment, puisque $\left(Ox,\vec{t}\right)=\varphi+\frac{\pi}{2}=2\theta+\frac{\pi}{2}$

  et $(Ox,\vec{v})=2\varphi+\frac{\pi}{2}=4\theta+\frac{\pi}{2}$; à savoir $\left(Ox,\frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial \varphi}\right)=3\theta+\frac{\pi}{2}$

9) L'angle formé avec (Ox) par la tangente en P au cercle de diamètre $[O,M]$ vaut d'après 5) $3\theta+\frac{\pi}{2}$; l'angle formé avec (Ox) par la tangente en P à la cardioïde a été calculé par différentes méthodes en 6), 7), 8) et vaut également $3\theta+\frac{\pi}{2}$

10) Le centre d'un de ces cercles est $S\begin{pmatrix}2cos^2\theta\\ 2sin\theta cos\theta\end{pmatrix}$, son rayon vaut $SP=OS=SM=2cos\theta$; d'où les équations paramétrées $\begin{cases} x=2cos^2\theta+2cos\theta\cos\,(\theta+t)\\ y=2cos\theta sin\theta+2cos\theta\sin\,(\theta+t)\end{cases}$; où θ définit le cercle de la famille et $t=(\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SQ})$ est le paramètre du point courant Q ; le point de contact P avec la cardioïde s'obtient pour $t=2\theta$.

    Calculons un vecteur tangent en P au cercle : $\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}_{t=2\theta}=\begin{pmatrix}-2cos\theta sin3\theta\\ 2cos\theta cos3\theta\end{pmatrix}$; ce vecteur est bien colinéaire au vecteur tangent à la cardioïde calculé en 6).

Association
GALILEE