Les Repunits : Voyage au cœur de la périodicité

<u>Introduction</u> : Les rationnels sont les nombres qui s'expriment sous la forme d'une fraction. Leur développement décimal est illimité périodique (à partir d'un certain rang), ou, pour le cas des nombres décimaux, limité. Nous étudions ici le premier cas, dans lequel nous allons voir que la période n est déterminée par l'appartenance du dénominateur de la fraction considérée à l'ensemble des diviseurs du n-ième Repunit, nombre entier constitué de n fois le chiffre 1 :

$$R_n = 111\dots11 \quad (nombre\text{ à }n\ chiffres\ tous\ \text{égaux à } 1)$$

L'étude de ces Repunits, ici en base 10, mais pouvant être généralisés à une base de numération quelconque, met en jeu des notions élémentaires de théorie des groupes finis, et incidemment la décomposition des polynômes cyclotomiques, qui intervient dans celle des corps finis.

Pour se faire une idée concrète des mécanismes mis en jeu, prenons un exemple très simple : considérons la fraction $x = \frac{1}{37}$. Il se trouve que le dénominateur de cette fraction, 37 est un nombre premier, et qu'il intervient comme facteur de la décomposition du Repunit de longueur 3, à savoir 111 : en effet $R_3 = 111 = 3 \times 37$. On peut en déduire que la période du développement décimal de $x = \frac{1}{37}$ est justement 3, la longueur du Repunit incriminé.

Cela est très facile à comprendre : le prototype du développement décimal de période égale à 3 est $\frac{1}{999} = 0{,}001001001\dots001\dots$; pour trouver le développement de $x = \frac{1}{37}$, il suffit d'écrire

$$x = \frac{1}{37} = \frac{3}{111} = \frac{27}{999} = 27 \times 0{,}001001001\dots001\dots = 0{,}027027027\dots027\dots$$

Notons que nous n'avons pas eu besoin de poser la division pour trouver de surcroit les chiffres de la période, à savoir 027

L'exemple suivant, celui d'un développement décimal de période 4 , peut se baser sur le facteur premier 11 au dénominateur, ou sur le facteur premier 101 , en effet :

$$1111 = 11 \times 101$$
$$x = \frac{1}{101} = \frac{11}{1111} = \frac{99}{9999} = 99 \times 0{,}000100010001\dots0001\dots = 0{,}009900990099\dots0099\dots$$
$$x = \frac{1}{11} = \frac{101}{1111} = \frac{909}{9999} = 909 \times 0{,}000100010001\dots0001\dots = 0{,}090909090909\dots0909\dots$$

En fait, dans le deuxième exemple, la période est égale à 2 , c'est un diviseur de 4 , cela tient à ce que le facteur premier 11 entre déjà dans la décomposition du deuxième Repunit $R_2 = 11$ (c'est exactement le deuxième Repunit, en fait), et a fortiori dans celle du quatrième $R_4 = 1111$, qui est un multiple de R_2, du fait que 4 est un multiple de 2 ; plus généralement R_{nm} est un multiple de R_n , et la règle de détermination des périodes est la suivante : la période de $x = \frac{1}{k}$ $(k\ premier)$ est précisément la longueur du plus petit Repunit R_n dans lequel k est un facteur.

Il reste à déterminer la période d'une fraction quelconque, en fonction de la décomposition en facteurs premiers de son dénominateur : c'est la question centrale à laquelle répond cet article.

Par exemple, considérons le cas de la fraction $x = \frac{1}{3737}$; le dénominateur $3737 = 101 \times 37$ fait intervenir un facteur de R_3 , à savoir 37, et un facteur de R_4 , à savoir 101 ; les périodes 3 et 4 relatives à ces deux facteurs sont premières entre elles, en conséquence, la période de x est égale à leur produit, c'est-à-dire à 12 .

Pour déterminer les chiffres de cette période, on peut écrire une relation de Bezout entre les facteurs 37 et 101 , par l'algorithme d'Euclide :

$$101 = 3 \times 37 - 10 \ , \qquad 37 = 4 \times 10 - 3, \ \ 10 = 3 \times 3 + 1$$
$$10 = 3 \times (4 \times 10 - 37) + 1, \ \ 3 \times 37 - 11 \times 10 = 1$$
$$1 = 3 \times 37 - 11 \times (3 \times 37 - 101) = 11 \times 101 - 30 \times 37$$

Ou simplement, de manière assez évidente, compte-tenu des factorisations précédentes :

$$1 = 1111 - 1110 = R_4 - 10 \times R_3 = 11 \times 101 - 30 \times 37$$

On en déduit :

$$x = \frac{1}{3737} = \frac{11 \times 101 - 30 \times 37}{37 \times 101} = 11 \times \frac{1}{37} - 30 \times \frac{1}{101}$$

$$x = 11 \times 0{,}027027027027 \ldots 027 \ldots - 30 \times 0{,}009900990099 \ldots 0099 \ldots$$
$$x = 0{,}297297297 \ldots 297 \ldots - 0{,}297029702970 \ldots 2970 \ldots$$
$$x = 0{,}000267594227000267594227 \ldots 000267594227 \ldots$$

On retrouve ainsi la période 12 annoncée.

Remarquons que la fraction $x = \frac{1}{3}$ (ou aussi $x = \frac{1}{9}$) a pour période 1 : $\frac{1}{3} = 0{,}33333 \ldots$; en fait le facteur 3 au dénominateur n'obéit pas à la même règle que la plupart des autres facteurs (ceux qui sont premiers avec 3 précisément) ; ce n'est pas $R_1 = 1$ que ce facteur 3 divise, mais $9R_1 = 9$, autrement dit :

$$x = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} = 3 \times 0{,}11111 \ldots = 0{,}33333 \ldots$$

Dans le cas général, d'un facteur k premier avec 3 , on avait l'équivalence (théorème de Gauss) : $k/9R_n \Leftrightarrow k/R_n$, et cette question ne se posait pas.

1) Quelques Rappels

a) Les Développements Décimaux
b) Notions de base sur les Groupes Cycliques
c) Les Polynômes Cyclotomiques

2) Repunits et périodicité des développements décimaux

a) Lien entre Repunits et périodicité
b) Interprétation par l'ordre d'un élément dans un groupe fini
c) Correspondance entre le treillis de divisibilité des Repunits et celui de leurs indices

3) Etude de la période du développement décimal de divers types de fractions

a) Périodicité des fractions du type $\frac{1}{p}$, où p est un nombre premier
b) Périodicité des fractions du type $\frac{a}{p}$, où p est un nombre premier, avec $a \leq p$
c) Périodicité des fractions du type $\frac{1}{p.q}$, où p et q sont deux nombres premiers distincts
d) Périodicité des fractions du type $\frac{1}{p^k}$, où p est un nombre premier
e) Cas général d'une fraction de numérateur égal à 1, puis de numérateur quelconque

4) Factorisation des Repunits

5) Les développements des racines carrées des Repunits

6) Les Repunits en base 2, 3 ou 5

1) Quelques Rappels

a) Les Développements Décimaux

Soit x un réel compris entre 0 et 1. On considère les deux suites α_n , β_n définies par : $\alpha_n = E(x \times 10^n)$, $\beta_n = \alpha_n + 1$; on a l'encadrement : $\alpha_n \leq x \times 10^n < \beta_n$, d'où on déduit : $\alpha_n 10^{-n} \leq x < \beta_n 10^{-n}$, cet encadrement définit ce que l'on appelle les approximations décimales par défaut et par excès à 10^{-n}près. On montre facilement que les suites $\alpha_n 10^{-n}$ et $\beta_n 10^{-n}$ sont adjacentes, et convergent toutes les deux vers x . Lorsque x est un réel quelconque, on se ramène à écrire les approximations décimales de $y = x - E(x)$. Dans le cas où x est un rationnel compris entre 0 et 1, soit $x = \frac{p}{q}$ l'écriture de x sous forme de fraction irréductible. On obtient alors les approximations successives par un algorithme de division ; cet algorithme peut s'écrire : $a = p$ *(1) tant que* $a \prec q$ *faire* $a = 10a$, $s = 0$ *(2) écrire* $a = qs + r$ *division euclidienne de a par q (3)* $a = r$ *revenir en (1)*

Les chiffres s obtenus au cours de ce processus forment les approximations par défaut successives : $\alpha_n 10^{-n} = 0, s_1 \dots s_n$; le développement $x = 0, s_1 \dots s_n \dots = \sum_{k=0}^{\infty} s_k\, 10^{-k}$ s'appelle développement décimal de x .

b) Notions de base sur les Groupes Cycliques

Un groupe cyclique G est un groupe fini engendré par un seul élément a. Si on note la loi de G sous forme multiplicative, et si on appelle e l'élément neutre, on a $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, où n est le plus petit exposant k non-nul tel que $a^k = e$, appelé aussi ordre de l'élément a .

Tout groupe cyclique d'ordre n (ie de cardinal n) est isomorphe au groupe additif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ des entiers modulo n. Dans l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ des entiers modulo n , on peut considérer le groupe multiplicatif des inversibles : ce groupe est constitué des classes des entiers premiers avec n ; son ordre est $\varphi(n)$, où φ est la fonction d'Euler. Pour un entier n de la forme $n = p^k$, $\varphi(n)$ vaut $p^{k-1}(p-1)$; φ est de plus multiplicative, c'est-à-dire que $\varphi(mn) = \varphi(n) \times \varphi(m)$ pour tout couple d'entiers m, n premiers entre eux.

D'après le théorème chinois, l'anneau $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ est isomorphe à l'anneau produit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ (toujours avec $n \wedge m = 1$) ce qui explique ce dernier résultat. De plus, si a est un inversible d'ordre k modulo n (pour la multiplication) et d'ordre l modulo m (ie k, l sont respectivement les plus petits exposants vérifiant : $a^k \equiv 1\ (mod\ n)$ et $a^l \equiv 1\ (mod\ m)$), alors l'ordre de a modulo mn est le ppcm de k et de l . Rappelons enfin que d'après le théorème de Lagrange, l'ordre d'un élément dans un groupe fini G, en tant qu'ordre du sous-groupe engendré par cet élément, est toujours un diviseur de l'ordre de G .

c) Les Polynômes Cyclotomiques

Ce sont les facteurs irréductibles sur $\mathbb{Q}$, à coefficients entiers, du polynôme $P = X^n - 1$; chaque polynôme cyclotomique $\phi_d(X)$ s'obtient comme le produit des $(X - \alpha_{d,j})$, où d est un diviseur de n, et $\{\alpha_{d,j}\}$ la famille des racines primitives d-ièmes de l'unité (ie des racines n-ièmes qui sont exactement d'ordre d) ; et on a la décomposition : $X^n - 1 = \prod_{d/n} \phi_d(X)$

2) Repunits et périodicité des développements décimaux

a) Lien entre repunits et périodicité

Soit une fraction de la forme $x = \frac{1}{p}$, où p est un nombre premier autre que 2 ou 5 .
Le développement décimal de cette fraction, obtenu en posant la division, est nécessairement périodique à partir d'un certain rang (cf 1a).

Supposons que la période, à n chiffres, ne commence qu'à partir du $(k+1)$-*ième* chiffre après la virgule. On va montrer, dans le cas envisagé ici où le dénominateur ne comporte pas de facteur 2 ou 5, que cette situation est impossible :

autrement dit, la période commence juste après la virgule, et la première répétition de reste dans le processus de division est celle du reste 1, ce qui n'était pas prévisible *a priori*.

Si N est le nombre entier constitué des chiffres de la période de ce développement, et N_0 celui constitué des chiffres précédant la période, on a :

$$x = N_0.10^{-k} + N.10^{-k}\left(10^{-n} + 10^{-2n} + 10^{-3n} + \cdots + 10^{-jn} + \cdots\right) = 10^{-k}\left(N_0 + N\frac{10^{-n}}{1-10^{-n}}\right)$$

$$= 10^{-k}\left(N_0 + \frac{N}{10^n - 1}\right)$$

$$= 10^{-k}\left(N_0 + \frac{N}{9R_n}\right)$$

La partie périodique du développement, soit $\frac{N}{9R_n}$, s'obtient dans le processus de division comme la fraction $\frac{a}{p}$, où a est un reste intermédiaire. Comme a est inférieur à p qui est premier, on sait que a et p sont premiers entre eux. L'égalité $Np = a \times 9R_n$ implique par le théorème de Gauss que p divise $9R_n$, le nombre $\frac{9R_n}{p}$ est donc un entier.

La relation qui exprime le lien entre x et son développement peut s'écrire :

$$10^k \times \frac{9R_n}{p} = N_0(9R_n) + N = N_0(10^n - 1) + N = 10^n \times N_0 + N - N_0$$

Si $k \leq n$, alors d'après cette égalité 10^k divise $N - N_0$,

par conséquent on peut affirmer que les séquences S_0 et S , resp. à k chiffres et n chiffres du développement de x ,représentées par les entiers N_0 et N , coïncident sur la séquence associée à N_0 :

$S = S_1, S_0$, d'où le séquencement : $S_0, S, S, \dots, S, \dots = S_0, S_1, S_0, S_1, \dots$; or cela est contradictoire, puisque la période apparaît sous la forme S_0, S_1 dès le premier chiffre après la virgule, et non pas comme on l'avait supposé sous la forme $S = S_1, S_0$ après les k premiers chiffres.

Dans le cas $n < k$ on peut tenir un raisonnement analogue, cette fois c'est la séquence associée à N_0 qui est composée, de la forme $S_0 = S_1, S$ où S est la séquence associée à N ; d'où une contradiction là aussi puisque la période S apparaît après les $k - n$ premiers chiffres.

Dans ces conditions, on en conclut que le développement périodique d'une fraction de numérateur égal à 1 , sans facteur 2 ni 5 au dénominateur (ce sera encore valable pour des fractions plus générales que $\frac{1}{p}$) , n'est pas différé, autrement dit, la séquence associée à N_0 n'existe pas, ce qui revient à faire $k = 0$ et $N_0 = 1$.
La formule ci-dessus se réduit donc à :

$$x = \frac{1}{p} = \frac{N}{9R_n}$$

b) Interprétation par l'ordre d'un élément dans un groupe cyclique

D'après le paragraphe précédent, si le développement décimal de $x = \dfrac{1}{p}$ est de période n , alors cette période commence dès le premier chiffre après la virgule, et p divise $9R_n$, ce qui implique que p divise R_n , sauf dans le cas particulier où $p = 3, n = 1$.

On peut définir la période n comme le plus petit des entiers m qui possède la propriété : p/R_m
Autrement dit, n est l'indice du premier repunit comportant p dans sa décomposition en facteurs premiers ; de plus, on prouve facilement (cf 2c) que l'ensemble des repunits ayant cette propriété est exactement l'ensemble des repunits d'indices multiples de n .

On peut retrouver ce résultat (dit « lemme de multiplicité ») par la considération suivante :

Pour tout p premier avec $p > 3$:

$$p \,/\, R_m \Leftrightarrow p \,/\, 9R_m = 10^m - 1 \Leftrightarrow 10^m \equiv 1 \; (mod\; p)$$

On peut dès lors interpréter n comme l'ordre de l'élément 10 dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ des éléments non-nuls du corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, groupe dont on sait qu'il est cyclique d'ordre $p - 1$ (c'est le groupe des éléments non-nuls d'un corps fini). L'ensemble des m vérifiant $10^m \equiv 1 \; (mod\; p)$ est l'idéal $n\,\mathbb{Z}$ de l'anneau principal $\mathbb{Z}$, il est engendré par son plus petit élément positif n , ce qui donne une preuve algébrique du lemme de multiplicité.

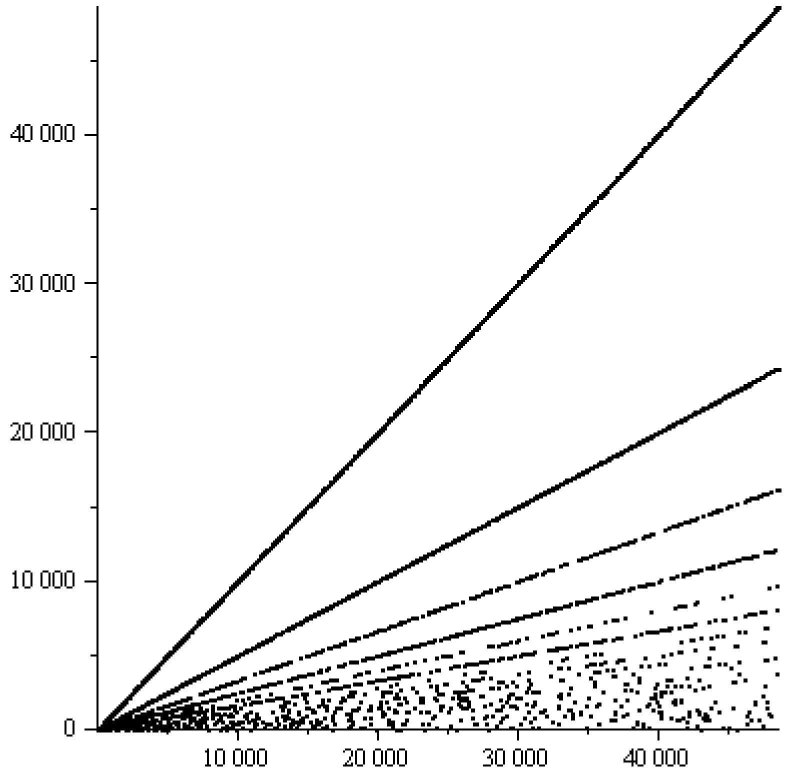
Il en résulte aussi le fait remarquable suivant : si n est la période de $x = \dfrac{1}{p}$, on a nécessairement :

$\boxed{n \,/\, p - 1}$, c'est-à-dire $\boxed{p = kn + 1.}$

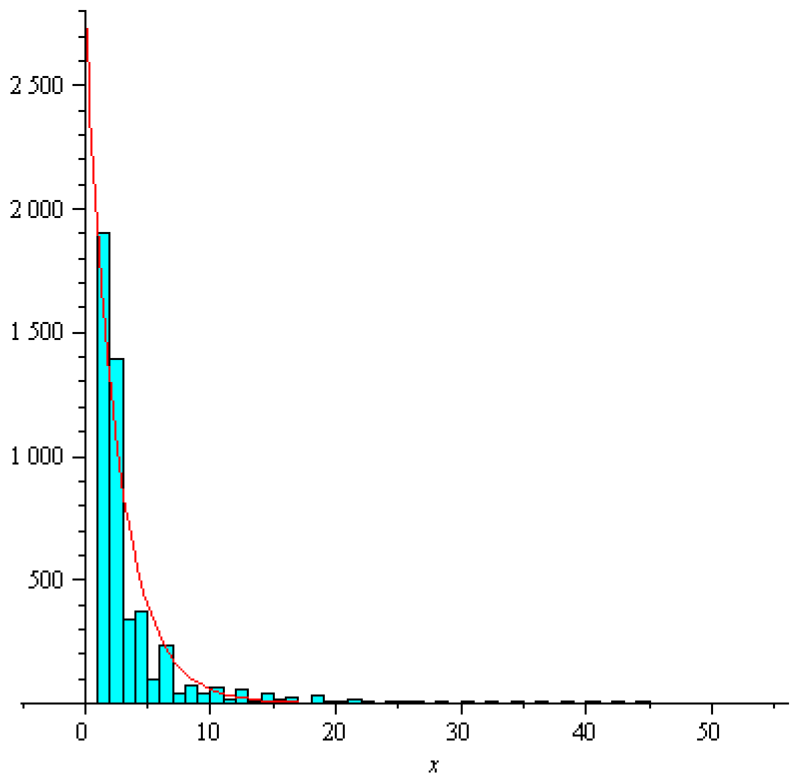
Mise en Evidence Expérimentale du lien entre facteur premier p et période n

L'étude empirique de la relation entre dénominateur p et période n associée confirme ce fait sous la forme d'un graphique faisant apparaître un faisceau de droites : les périodes sont à l'unité près des « harmoniques » des dénominateurs dans les rapports

$$\frac{n}{p} \cong 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \;..., \;\frac{1}{k}, ...$$ *; voir le graphique ci-après.*



De plus, la distribution des entiers k inverses de ces rapports suit une loi de probabilité assez proche d'une loi exponentielle :



c) Correspondance entre le treillis de divisibilité des repunits et celui de leurs indices

On établit sans peine la formule suivante : si $m = nq + r \quad (0 \leq r < n)$ est la division euclidienne de m par n, alors celle de R_m par R_n s'écrit :

$$\boxed{R_m = \frac{1}{9}(10^m - 1) = \frac{1}{9}(10^r \times 10^{nq} - 1) = \frac{1}{9}(10^r \times (10^{nq} - 1) + (10^r - 1)) = 10^r \times R_{nq} + R_r}$$

En effet, R_{nq} est un multiple de R_n, par la formule : $R_{nq} = R_n \times \left(\sum_{j=0}^{q-1} 10^{jn}\right)$, et de plus R_r est bien compris entre 0, pour $r = 0$, et R_{n-1} pour $r = n - 1$, lequel est strictement plus petit que R_n, ce qui désigne bien R_r comme le reste de la division de R_m par R_n.

Cette formule de division euclidienne a comme corollaire : $\boxed{R_n \ / \ R_m \Leftrightarrow n \ / \ m}$, on retrouve ainsi le lemme de multiplicité déjà énoncé.

Mais on peut aussi donner d'autres conséquences remarquables de la formule de division euclidienne des repunits :

$R_n \wedge R_m = R_{n \wedge m}$ (correspondance entre les pgcd et ppcm des indices
$R_n \vee R_m \ / \ R_{n \vee m}$ et les pgcd et ppcm des repunits associés)

Pour montrer le premier résultat, on peut utiliser l'algorithme d'Euclide, en déroulant cet algorithme en parallèle sur les indices et les repunits associés, grâce à la correspondance entre la division euclidienne des indices et celle des repunits.

Le second résultat est une simple conséquence du lemme de multiplicité : $R_{n \vee m}$ est un multiple commun de R_n et R_m, donc c'est un multiple de leur ppcm. Cependant on peut affirmer que le plus petit commun multiple de R_n et R_m ***parmi l'ensemble des repunits*** est exactement $R_{n \vee m}$.

Notons enfin la formule du produit :

$$\boxed{R_n \times R_m = \frac{1}{9^2}\big((10^n - 1)(10^m - 1)\big) = \frac{1}{9^2}\big((10^{n+m} - 1) - (10^n - 1) - (10^m - 1)\big) = \frac{1}{9}(R_{n+m} - R_n - R_m)}$$

Et aussi cette écriture utilisée au début de ce paragraphe :

$$R_{nq} = R_n \times S_{q,n} \quad avec \quad S_{q,n} = \sum_{j=0}^{q-1} 10^{jn}$$

Cette dernière formule explique pourquoi la relation $R_n \vee R_m \ / \ R_{n \vee m}$ est une relation de division stricte en général ; il suffit de poser $n = \delta n' \ \ m = \delta m' \ \ avec\ \delta = n \wedge m\,,\ n' \wedge m' = 1,\ \ \mu = \delta n' m'$ pour s'en rendre compte, nous laisserons cette vérification au lecteur.

3) Etude de la période du développement décimal de divers types de fractions

a) Périodicité des fractions du type $\frac{1}{p}$, où p est un nombre premier

On a vu que la période n de ce type de fraction est égale à l'ordre de l'élément 10 dans le groupe cyclique $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ d'ordre $p-1$ des éléments non-nuls modulo p ; cette période divise $p-1$.

b) Périodicité des fractions du type $\frac{a}{p}$, où p est un nombre premier > 3, avec $a < p$

La période est exactement celle de $\frac{1}{p}$, puisque l'on peut écrire : $\boxed{\frac{a}{p} = \frac{aN}{9R_n}}$;

pour que cette fraction se simplifie sous la forme $\frac{M}{9R_d}$ avec d diviseur de n, il faudrait avoir : $9aNR_d = Mp$; or p est premier avec a et aussi, sauf dans le cas où il diviserait N, premier avec $9aN$ (en écartant le cas $p = 3$) ; p devrait donc diviser R_d (thm de Gauss), mais ceci est contradictoire, car R_n est supposé être le plus petit Repunit qui comporte p comme facteur.

La seule exception, rarissime, à ce raisonnement concerne le cas où R_n serait multiple de p^2 (ce qui équivaut à ce que N soit multiple de p) , elle sera étudiée en 3d).

c) Périodicité des fractions du type $\frac{1}{p.q}$, où p et q sont deux nombres premiers distincts

On écrit une relation de Bezout entre p et q : $pu + qv = 1$ d'où :

$$\frac{1}{pq} = \frac{v}{p} + \frac{u}{q} = \frac{vN}{9R_n} + \frac{uM}{9R_m}$$

Cette écriture montre que la période de $\frac{1}{p.q}$ est le ppcm des périodes n et m, en effet, le plus petit dénominateur commun pris dans l'ensemble des $9R_t$ n'est autre que $9R_{n\vee m}$.

On peut aussi revenir à la définition de la période de $\frac{1}{p.q}$ comme l'ordre de 10 modulo $p.q$; comme p et q sont premiers entre eux, cet ordre est le ppcm des ordres modulo p et modulo q, d'après un corollaire du théorème chinois (cf 1b).

d) Périodicité des fractions du type p^k où p est un nombre premier > 3

Commençons par $x = \frac{1}{p^2}$ avec p premier.

Comme précédemment, la période est l'ordre de l'élément 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^*$ des inversibles de l'anneau intègre $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. On sait là aussi que ce groupe est cyclique, d'ordre $\varphi(p^2) = p(p-1)$, où φ est l'indicateur d'Euler.

Soit n la période de $\frac{1}{p}$, et soit m la période de $\frac{1}{p^2}$; on peut écrire ces résultats sous la forme :

$$n\mathbb{Z} = idéal\ des\ entiers\ k\ tels\ que\ 10^k \in p\mathbb{Z}$$
$$m\mathbb{Z} = idéal\ des\ entiers\ k\ tels\ que\ 10^k \in p^2\mathbb{Z}$$

Il est clair que $m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$, ce qui signifie que n divise m.

On pouvait d'ailleurs s'en rendre compte autrement, en écrivant la fraction $\frac{1}{p}$ sous la forme : $\frac{1}{p} = \frac{p}{p^2}$, d'où $\frac{1}{p} = \frac{pM}{9R_m}$, ce qui montre bien que la période n de $\frac{1}{p}$ divise m, puisque m apparaît comme « une période » possible, appartenant à l'idéal $n\mathbb{Z}$, et que n est par définition la meilleure d'entre elles, c'est-à-dire le diviseur de cet idéal.

On va montrer maintenant que la période m de $\frac{1}{p^2}$ divise np ; pour cela écrivons $9R_{np}$ sous la forme : $9R_{np} = 10^{np} - 1 = (10^n - 1)(10^{n(p-1)} + \cdots + 10^n + 1)$

(c'est l'écriture $R_{np} = R_n \times S_{p,n}$ déjà mentionnée)

Alors on peut noter, d'une part que p divise $10^n - 1 = 9R_n$, mais aussi que chacun des termes de la somme $S_{p,n}$ est congru à 1 modulo p ; cette somme est donc congrue à p , c'est-à-dire à 0 , modulo p .

En définitive, on voit que $9R_{np}$ est divisible par p^2 , ce qui prouve le résultat annoncé : np est « une période » possible, et m est la meilleure d'entre elles, donc elle divise np.

Comme on sait que n et p sont premiers entre eux (puisque n divise $p - 1$) , on en conclut :

la période de $\frac{1}{p^2}$ est soit égale à n, soit égale à np .

Etude Empirique des cas où la période de $\frac{1}{p^2}$ est égale à la période de $\frac{1}{p}$

Le cas de $p = 3$ est le premier exemple : $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{9}$ sont toutes les deux de période égale à 1.

Par analyse exhaustive de $p = 7$ à $p > 10^8$, on a pu détecter deux exemples, de forme très particulière, ayant cette propriété. Ce sont :

$p = 487 = 1 + 2 \times 3^5$; et :

$$p = 56598313 = 1 + 2^3 \times 3 \times 31 \times 127 \times 599$$
$$= 1 + 2^3 \times (2^2 - 1) \times (2^5 - 1) \times (2^7 - 1) \times (2^3.3.5^2 - 1)$$

On a ensuite construit un modèle pour probabiliser les occurrences, très rares, de ces exemples. L'hypothèse de ce modèle est la suivante : on sait que 10^{np} est congru à 1 modulo p^2, et que 10^n est congru à 1 modulo p ; supposons que les restes de 10^n modulo p^2 soient équirépartis dans l'ensemble $\{1, 1 + p, 1 + 2p, \ldots, 1 + (p - 1)p\}$

(qui forme d'ailleurs un groupe multiplicatif cyclique d'ordre p , isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par le morphisme : $k \longrightarrow 1 + kp$, au sein du groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, qui est d'ordre $p(p-1)$, et dont on peut montrer qu'il est lui-même cyclique).

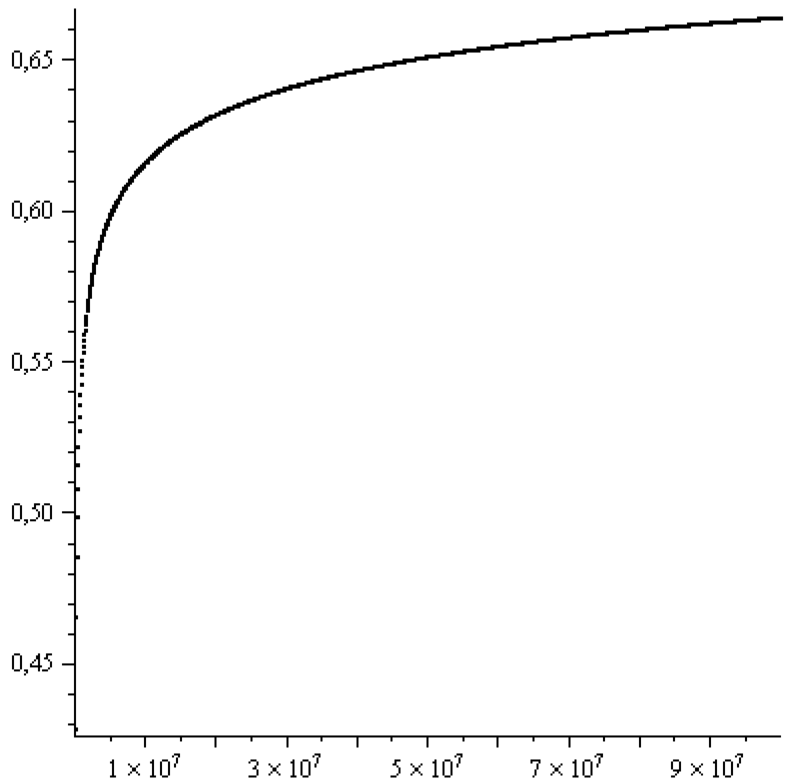
La probabilité d'occurrence de l'évènement : « $\frac{1}{p^2}$ est de même période n que $\frac{1}{p}$ » c'est-à-dire « 10^n congru à 1 modulo p^2 » est donc, selon cette hypothèse, égale à $\frac{1}{p}$. On peut d'ailleurs assez facilement valider cette hypothèse à partir d'histogrammes expérimentaux.

Supposons également que ces évènements soient indépendants quand le nombre premier p varie.

Alors on peut en déduire la loi de l'évènement « la première occurrence d'égalité des périodes de $\frac{1}{p^2}$ et $\frac{1}{p}$ survient avant la valeur $p = x$ (à partir de $p = x_0$) ».

Cette loi est quasi-géométrique, en $1 - \prod_{p=x_0}^{p=x}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$

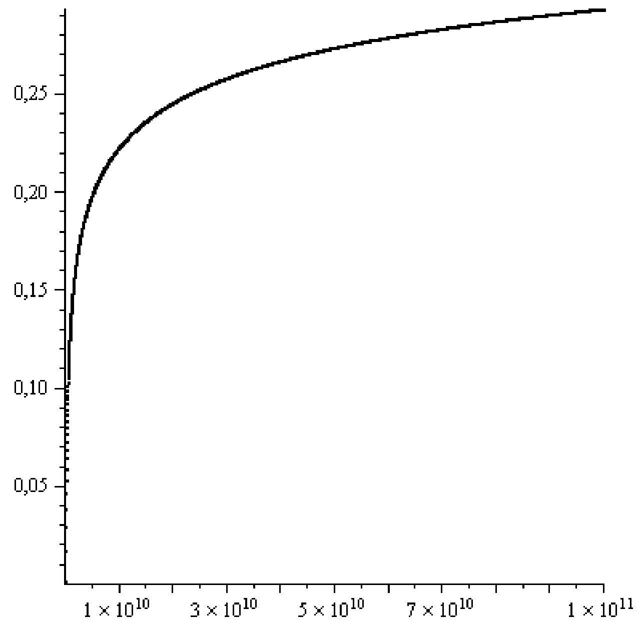
Avec x_0 =500, on obtient le graphique suivant :

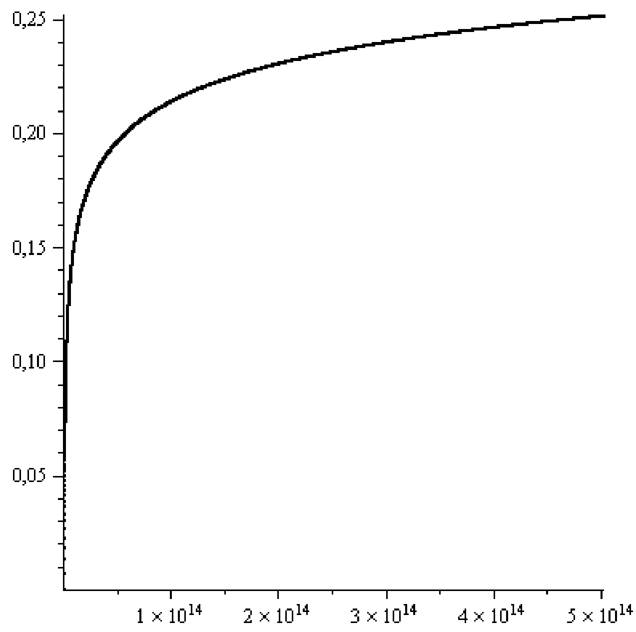


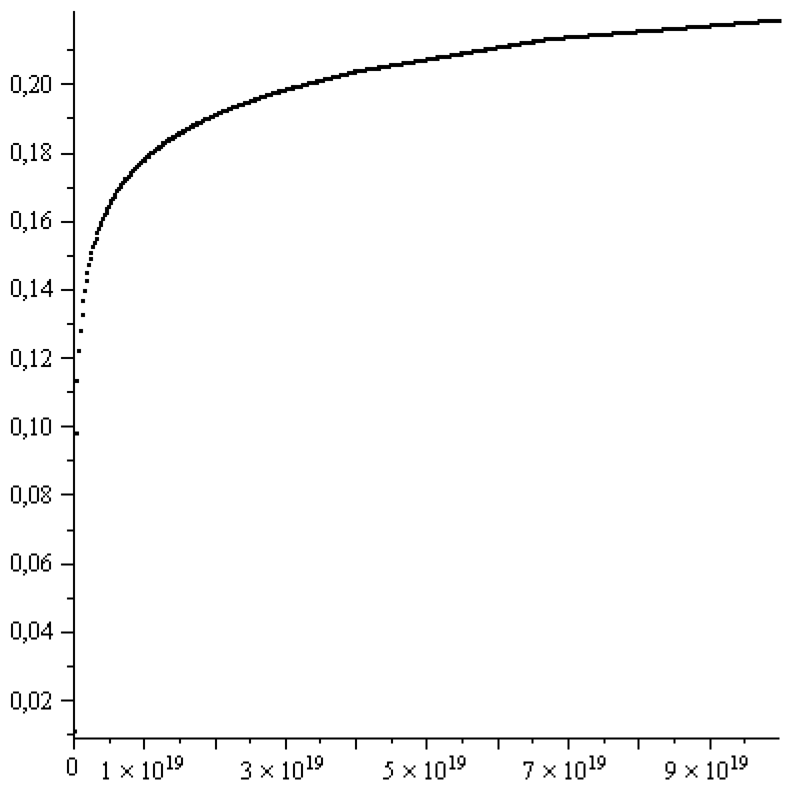
On voit qu'il est plausible d'avoir trouvé l'exemple suivant entre 5.10^7 et 6.10^7 , sans pour autant que le graphique n'ait de caractère prédictif (comme sa croissance est très molle au voisinage de l'asymptote, on aurait pu aussi bien s'attendre à le trouver entre 10^{14} et 10^{15} ! La seule chose que l'on puisse affirmer, c'est qu'il y avait 60% de chances de le trouver en deça de 10^7 , 80% de chances en deça de 10^{20} (voir graphiques suivants) ce qui est une information très maigre…(un test d'hypothèse de faible puissance, disent les statisticiens).

Il devient assez vite nécessaire, pour calculer cette loi dans un temps raisonnable, soit de recourir à des moyennes par tranches de nombres premiers consécutifs (c'est le cas du graphique ci-dessus), soit de recourir à une estimation sur une subdivision arithmétique du nombre de nombres premiers dans chaque tranche, par l'usage de la fonction log-intégral par exemple.

En réinitialisant la loi successivement à partir de $x_0 = 6\times10^7$, $x_0 = 10^{11}$, $x_0 = 10^{15}$ *; on obtient les graphiques suivants :*







Les valeurs maximales atteintes sur ces graphiques nous donnent la probabilité :

$$1-0.72\times0.75\times0.79=0.57$$

de trouver le troisième exemple en deça de 20 chiffres.

Ceci le rend hors d'atteinte d'un calculateur standard , à moins de deviner une formule qui rende compte de la forme particulière des deux premiers exemples.

Le deuxième exemple était a priori en deça de 20 chiffres avec la probabilité :

$$1-0.34\times0.75\times0;79\cong0.80$$

Une modélisation analogue de la loi de probabilité de l'occurrence d'une coïncidence entre les périodes de $\frac{1}{p^2}$ et $\frac{1}{p^3}$, ou plus généralement des périodes de $\frac{1}{p^k}$ et $\frac{1}{p^{k+1}}$ $(k \geq 2)$ montre qu'un tel évènement est négligeable ; dans les deux cas observés, ou d'autres analogues, de coïncidence entre les périodes de $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{p^2}$, dont on a vu qu'ils étaient rarissimes mais néanmoins détectables, cette coïncidence a donc pour effet de décaler la loi de formation des périodes, la période de $\frac{1}{p^k}$ $(k \geq 2)$ devenant alors égale à $n \times p^{k-2}$ au lieu de $n \times p^{k-1}$ comme c'est le cas en règle générale.

e) Cas général d'une fraction de numérateur égal à 1, puis de numérateur quelconque

Soit le cas d'une fraction $x = \frac{1}{\prod_{j=1}^{s} {p_j}^{k_j}}$ où les p_j sont des facteurs premiers distincts.

Supposons connues les périodes respectives n_j des fractions $\frac{1}{p_j}$; alors la période de x s'écrit : $n = ppcm\left(n_1, n_2, \dots, n_s, {p_1}^{k_1 - 1}, \dots, {p_s}^{k_s - 1}\right)$. Dans la plupart des cas, n est le produit des facteurs indiqués qui sont premiers entre eux, c'est-à-dire le produit des périodes élémentaires multiplié par l'entier $\frac{x}{p_1 \dots p_s}$. Mais il peut arriver qu'exceptionnellement, la période de l'une des fractions élémentaires coïncide avec le facteur premier au dénominateur d'une autre fraction élémentaire.

Par exemple, considérons la fraction : $x = \frac{1}{53^2 \times 107^2}$; $\frac{1}{53}$ est de période 13, tandis que $\frac{1}{107}$ est de période 53 ; il en résulte que $y = \frac{1}{53^2}$ est de période 53×13 , et que $z = \frac{1}{107^2}$ est de période 107×53 ; la période de x est $107 \times 53 \times 13$, ce n'est pas le produit des périodes de y et z, mais leur plus petit commun multiple, on conçoit que cette coïncidence est relativement peu fréquente.

Soit maintenant une fraction $y = \frac{a}{\prod_{j=1}^{s} {p_j}^{k_j}}$ de dénominateur a plus petit que le numérateur et de forme irréductible; montrons que cette fraction a en règle générale même période n que x : si ce n'était pas le cas, la fraction $\frac{aN}{9R_n}$ serait simplifiable au dénominateur $9R_d$,d'où comme en 3b) l'égalité : $9aNR_d = M \prod_{j=1}^{s} p_j^{k_j}$; en écartant le cas où l'un des p_j est égal à 3, et aussi celui où N n'est pas premier avec $\prod_{j=1}^{s} p_j^{k_j}$, et compte-tenu du fait que y est supposée de forme irréductible , cela impliquerait d'après le théorème de Gauss que R_d soit divisible par $\prod_{j=1}^{s} p_j^{k_j}$; ce qui est contradictoire (la période de x serait alors plus petite que n).

De plus, le cas où l'un des p_j divise N ne peut se produire que si $p_j^{k_j+1}$ divisait R_n ; or cela n'est possible que pour les exceptions rarissimes discutées en 3d). Nous laissons au lecteur la discussion des exceptions éventuelles à la règle générale : « x et y sont de même période », due à la présence d'un facteur 3 au dénominateur de la fraction étudiée.

4) Factorisation des Repunits

Cette factorisation peut s'effectuer, soit par décomposition en facteurs premiers dans l'ensemble des entiers, soit par factorisation cyclotomique du polynôme $x^n - 1$ prise en la valeur $x = 10$; cette deuxième option faisant apparaître des facteurs de forme très particulière, non forcément premiers, et pouvant servir à une décomposition intermédiaire pour la recherche de facteurs premiers.

La décomposition en facteurs premiers peut s'opérer par la routine *ifactor* de *Maple* , et donne les résultats en un temps raisonnable jusqu'à $n = 70$; au-delà, on peut recourir à des tables existantes disponibles sur Internet.

L'interprétation des résultats est la suivante : par exemple, le facteur premier 239 apparaît pour la première fois dans la décomposition du Repunit R_7 , et aussi bien sûr dans celle de tous les Repunits d'indices multiples de 7, à savoir $R_{14}, R_{21}, \ldots$: cela montre que la période de la fraction $\frac{1}{239}$ est égale à 7.

On peut constater sur le tableau de décomposition ci-dessous que les facteurs carrés sont assez rares : on retrouve ainsi le fait étudié précédemment, à savoir que l'apparition du facteur $\frac{1}{p}$ *a toutes les chances de précéder celle du facteur* $\frac{1}{p^2}$ *, dans la liste des Repunits rangés par indices croissants :* $\frac{1}{p}$ *et* $\frac{1}{p^2}$ *, n'ont donc pas en général la même période.*

```
repunitfactor(2, 39);
```

2, "----->", (11)

"____", 0., 0., " secondes"

3, "----->", (3) (37)

"____", 0., 0., " secondes"

4, "----->", (11) (101)

"____", 0., 0., " secondes"

5, "----->", (41) (271)

"____", 0., 0., " secondes"

6, "----->", (3) (7) (11) (13) (37)

"____", 0., 0., " secondes"

7, "----->", (239) (4649)

"____", 0., 0., " secondes"

8, "----->", (11) (73) (101) (137)

"____", 0., 0., " secondes"

9, "----->", $(3)^2$ (37) (333667)

"____", 0., 0., " secondes"

10, "----->", (11) (41) (271) (9091)

"____", 0., 0., " secondes"

11, "----->", (513239) (21649)

"____", 0., 0., " secondes"

12, "----->", (3) (7) (11) (13) (37) (101) (9901)

"____", 0., 0., " secondes"

13, "----->", (53) (79) (265371653)

"______________________________", 0., 0., " secondes"

14, "----->", (11) (239) (4649) (909091)

"______________________________", 0., 0., " secondes"

15, "----->", (3) (31) (37) (41) (271) (2906161)

"______________________________", 0., 0., " secondes"

16, "----->", (11) (17) (73) (101) (137) (5882353)

"______________________________", 0., 0., " secondes"

17, "----->", (5363222357) (2071723)

"______________________________", 0., 0., " secondes"

18, "----->", $(3)^2$ (7) (11) (13) (19) (37) (333667) (52579)

"______________________________", 0., 0., " secondes"

19, "----->", (1111111111111111111)

"______________________________", 0., 0., " secondes"

20, "----->", (11) (41) (101) (271) (27961) (9091) (3541)

"______________________________", 0., 0., " secondes"

21, "----->", (3) (37) (43) (239) (10838689) (4649) (1933)

"______________________________", 0., 0., " secondes"

22, "----->", $(11)^2$ (23) (513239) (21649) (8779) (4093)

"______________________________", 0., 0., " secondes"

23, "----->", (11111111111111111111111)

"______________________________", 0.015, 0.015, " secondes"

24, "----->", (3) (7) (11) (13) (37) (73) (101) (137) (99990001) (9901)

"______________________________", 0.015, 0., " secondes"

25, "----->", (41) (271) (182521213001) (21401) (25601)

"______________________________", 0.015, 0., " secondes"

26, "----->", (11) (53) (79) (859) (1058313049) (265371653)

"______________________________", 0.078, 0.063, " secondes"

27, "----->", $(3)^3$ (37) (757) (440334654777631) (333667)

"______________________________", 0.078, 0., " secondes"

28, "----->", (11) (29) (101) (239) (281) (121499449) (4649) (909091)

"______________________________", 0.078, 0., " secondes"

29, "----->", (77843839397) (62003) (43037) (16763) (3191)

"______________________________", 0.078, 0., " secondes"

30, "----->", (3) (7) (11) (13) (31) (37) (41) (211) (241) (271) (2906161) (9091) (2161)

"______________________________", 0.093, 0.015, " secondes"

31, "----->", (57336415063790604359) (6943319) (2791)

"______________________________", 0.422, 0.329, " secondes"

32, "----->", (11) (17) (73) (101) (137) (353) (449) (641) (1409) (5882353) (69857)

"______________________________", 0.422, 0., " secondes"

33, "----->", (3) (37) (67) (134462821031329873) (513239) (21649)

"______________________________", 0.422, 0., " secondes"

34, "----->", (11) (103) (21993833369) (5363222357) (2071723) (4013)

"______________________________", 0.515, 0.093, " secondes"

35, "----->", (41) (71) (239) (271) (102598800232111471) (123551) (4649)

"______________________________", 0.515, 0., " secondes"

36, "----->", $(3)^2$ (7) (11) (13) (19) (37) (101) (999999000001) (333667) (52579) (9901)

"______________________________", 0.515, 0., " secondes"

37, "----->", (2212394296770203368013) (2028119) (247629013)

"______________________________", 0.593, 0.078, " secondes"

38, "----->", (11) (909090909090909091) (1111111111111111111)

"____", 4.718, 4.125, " secondes"

39, "----->", (3) (37) (53) (79) (900900900900990990990991) (265371653)

"____", 5.047, 0.329, " secondes"

"temps calcul total = ", 5.047

repunitfactor(40, 100) :

40, "----->", (11) (41) (73) (101) (137) (271) (1676321) (5964848081) (27961) (9091) (3541)

"____", 0.093, 0.093, " secondes"

41, "----->", (83) (1231) (20176370990032280374865794236 1) (538987)

"____", 0.093, 0., " secondes"

42, "----->", (3) $(7)^2$ (11) (13) (37) (43) (127) (239) (10838689) (459691) (4649) (909091) (1933) (2689)

"____", 0.093, 0., " secondes"

43, "----->", (173) (2140992015395526641) (1963506722254397) (1527791)

"____", 2.890, 2.797, " secondes"

44, "----->", $(11)^2$ (23) (89) (101) (1056689261) (1052788969) (513239) (21649) (8779) (4093)

"____", 2.968, 0.078, " secondes"

45, "----->", $(3)^2$ (31) (37) (41) (271) (2906161) (4185502830133110721) (333667) (238681)

"____", 3.140, 0.172, " secondes"

46, "----->", (11) (47) (139) (549797184491917) (11111111111111111111111) (2531)

"____", 21.453, 18.313, " secondes"

47, "----->", (3163629087634585250014061540387263822 79) (35121409)

"____", 21.453, 0., " secondes"

48, "----->", (3) (7) (11) (13) (17) (37) (73) (101) (137) (9999999900000001) (99990001) (5882353) (9901)

"____", 21.453, 0., " secondes"

49, "----->", (239) (197673014459819096356802301467933 3) (505885997) (4649)

"____", 21.453, 0., " secondes"

50, "----->", (11) (41) (251) (271) (78875943472201) (182521213001) (5051) (9091) (21401) (25601)

"____", 21.688, 0.235, " secondes"

51, "----->", (3) (37) (613) (5363222357) (13168164561429877) (2071723) (210631) (52986961)

"____", 21.906, 0.218, " secondes"

52, "----->", (11) (53) (79) (101) (521) (859) (1900381976777332243781) (1058313049) (265371653)

"____", 22.656, 0.750, " secondes"

53, "----->", (107) (1325815267337711173) (47198858799491425660200071) (1659431)

"____", 134.673, 112.017, " secondes"

54, "----->", $(3)^3$ (7) (11) (13) (19) (37) (757) (440334654777631) (14175966169) (70541929) (333667) (52579)

"____", 134.673, 0., " secondes"

55, "----->", (41) (271) (1321) (1300635692678058358830121) (83251631) (513239) (21649) (62921)

"____", 134.876, 0.203, " secondes"

56, "----->", (11) (29) (73) (101) (137) (239) (281) (1275220010201505037 61) (121499449) (4649) (909091) (7841)

"____", 135.283, 0.407, " secondes"

57, "----->", (3) (37) (1111111111111111111) (3931123022305129377976519) (10749631) (21319)

"____", 168.439, 33.156, " secondes"

58, "----->", (11) (59) (1540832049306625577812 01849) (77843839397) (62003) (43037) (16763) (3191)

"____", 175.111, 6.672, " secondes"

59, "----->", (4340876285657460212144534289928559826755746751) (2559647034361)

"____", 175.111, 0., " secondes"

60, "----->",
(3) (7) (11) (13) (31) (37) (41) (61) (101) (211) (241) (271) (39526741) (2906161) (4188901) (27961) (9091)
(3541) (9901) (2161)

"____", 175.236, 0.125, " secondes"

____", 175.250, 0.125, " secondes"

61, "----->", (733) (106007173861643) (7061709990156159479) (1360682471) (974293) (329401) (4637)

"____", 178.626, 3.390, " secondes"

62, "----->", (11) (57336415063790604359) (909090909090909090909090909091) (6943319) (2791)

"____", 578.704, 400.078, " secondes"

63, "----->",

(3)^2 (37) (43) (239) (10838689) (1921436048294281) (45121231) (45613) (333667) (4649) (10837) (23311) (1933)

"____", 578.829, 0.125, " secondes"

64, "----->",

(11) (17) (73) (101) (137) (353) (449) (641) (1409) (976193) (834427406578561) (5882353) (69857) (6187457) (19841)

"____", 578.923, 0.094, " secondes"

65, "----->", (41) (53) (79) (271) (5538396997364024056286510640780600481) (162503518711) (265371653)

"____", 593.766, 14.843, " secondes"

66, "----->",

(3) (7) (11)^2 (13) (23) (37) (67) (1344628210313298373) (599144041) (183411838171) (513239) (21649) (8779) (4093)

"____", 595.688, 1.922, " secondes"

67, "----->", (28213380943176667001263153660999177245677) (79863595778924342083) (493121)

"____", 8347.404, 7751.716, " secondes"

68, "----->",

(11) (101) (103) (5363222357) (2324557465671829) (21993833369) (2071723) (1491383821) (28559389) (4013)

"____", 8348.076, 0.672, " secondes"

69, "----->", (3) (37) (277) (1111111111111111111111111) (1595352086329224644348978893) (203864078068831)

"   ", 8930.530, 582.454, " secondes"

70, "----->",

(11) (41) (71) (239) (271) (265212793249617641) (102598800232111471) (123551) (4147571) (9091) (4649) (909091)

"   ", 8933.436, 2.906, " secondes"

La factorisation cyclotomique (dont les facteurs sont premiers au sens des polynômes) s'écrit :

$$2,\ (x-1)(x+1)$$
$$3,\ (x-1)(x^2+x+1)$$
$$4,\ (x-1)(x+1)(x^2+1)$$
$$5,\ (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$6,\ (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$
$$7,\ (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$8,\ (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$
$$9,\ (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$$
$$10,\ (x-1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$
$$11,\ (x-1)(1+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)$$
$$12,\ (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$$
$$13,\ (x-1)(1+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)$$
$$14,\ (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x+1)(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6)$$
$$15,\ (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)(1-x+x^3-x^4+x^5-x^7+x^8)$$
$$16,\ (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$$
$$17,\ (x-1)(1+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)$$
$$18,\ (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)(x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1)$$
$$19,\ (x-1)(1+x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)$$
$$20,\ (x-1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^2+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)$$
$$21,\ (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)(1-x+x^3-x^4+x^6-x^8+x^9-x^{11}+x^{12})$$
$$22,\ (x-1)(1+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)(x+1)(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-x^9+x^{10})$$

Cette factorisation donne, en prenant $x = 10$, les facteurs suivants, de forme remarquable :

{2, [9, 11]}
{3, [9, 111]}
{4, [9, 11, 101]}
{5, [9, 11111]}
{6, [9, 11, 111, 91]}
{7, [9, 1111111]}
{8, [9, 11, 101, 10001]}
{9, [9, 111, 1001001]}
{10, [9, 11, 11111, 9091]}
{11, [9, 11111111111]}
{12, [9, 11, 111, 91, 101, 9901]}
{13, [9, 1111111111111]}
{14, [9, 1111111, 11, 909091]}
{15, [9, 11111, 111, 90090991]}
{16, [9, 11, 101, 10001, 100000001]}
{17, [9, 11111111111111111]}
{18, [9, 111, 1001001, 11, 91, 999001]}
{19, [9, 1111111111111111111]}
{20, [9, 11, 11111, 9091, 101, 99009901]}
{21, [9, 1111111, 111, 900900990991]}
{22, [9, 11111111111, 11, 9090909091]}
{23, [9, 11111111111111111111111]}
{24, [9, 11, 111, 91, 101, 9901, 10001, 99990001]}
{25, [9, 11111, 100001000010000100001]}
{26, [9, 1111111111111, 11, 909090909091]}
{27, [9, 111, 1001001, 1000000001000000001]}
{28, [9, 1111111, 11, 909091, 101, 990099009901]}
{29, [9, 11111111111111111111111111111]}
{30, [9, 11111, 111, 90090991, 11, 9091, 91, 109889011]}
{31, [9, 1111111111111111111111111111111]}
{32, [9, 11, 101, 10001, 100000001, 10000000000000001]}
{33, [9, 11111111111, 111, 90090090090990990991]}
{34, [9, 11111111111111111, 11, 9090909090909091]}
{35, [9, 1111111, 11111, 900009090090909909099991]}
{36, [9, 111, 1001001, 11, 91, 999001, 101, 9901, 999999000001]}
{37, [9, 1111111111111111111111111111111111111]}
{38, [9, 1111111111111111111, 11, 909090909090909091]}
{39, [9, 1111111111111, 111, 900900900900990990990991]}
{40, [9, 11, 11111, 9091, 101, 99009901, 10001, 9999000099990001]}
{41, [9, 11111111111111111111111111111111111111111]}
{42, [9, 1111111, 111, 900900990991, 11, 909091, 91, 1098900989011]}
{43, [9, 1111111111111111111111111111111111111111111]}
{44, [9, 11111111111, 11, 9090909091, 101, 99009900990099009901]}
{45, [9, 11111, 111, 90090991, 1001001, 999000000999000999999001]}
{46, [9, 11111111111111111111111, 11, 9090909090909090909091]}
{47, [9, 11111111111111111111111111111111111111111111111]}
{48, [9, 11, 111, 91, 101, 9901, 10001, 99990001, 100000001, 9999999900000001]}
{49, [9, 1111111, 1000000100000010000001000000100000010000001]}
{50, [9, 11111, 100001000010000100001, 11, 9091, 99999000009999900001]}
{51, [9, 11111111111111111, 111, 90090090090090090990990990990991]}

5) Les développements décimaux des racines carrées des Repunits

Voici les développements décimaux des racines carrées des premiers repunits :

```
> repunitsearch := proc(f, p, Nmin, Nmax)

   for n from Nmin to Nmax do
   N := repunit(n) :
   print(n, evalf(f(N), p)) :
   od:
   end;

Warning, `n` is implicitly declared local to procedure `repunitsearch`
Warning, `N` is implicitly declared local to procedure `repunitsearch`
repunitsearch := proc(f, p, Nmin, Nmax)                                        (7)
   local n, N;
   for n from Nmin to Nmax do
      N := repunit(n); print(n, evalf(f(N), p))
   end do
end proc
> f := sqrt
                              f := sqrt                                        (8)
> repunitsearch(f, 300, 2, 40 );
2,
   3.316624790355399849114932736670686683927088545589353597058682146116484642609043846708843399128290650907 0\
   125578495274565922754397848575474797793249330447288473028739748286556825773944446120980444771931123571441\
   3297152109883266049571003724852073810682080748758396589499452515931529840068271971051828956
3,
   10.535653752852738848401404661899667476747700659724348330440129127826034245883489750331872092669322070501\
   447928774693713705933160908981560192163899075171014822236300815995378647826079964440060180707862666889360\
   0678164258360480498283422381274268137054500253905549775126906746236599939467856836407387787
```

```
5,
   105.408728291351660723551325814446028292809274129194844047005509392267155496683722426592216780050238135 04\
   423635836021637104571294504666324113208689930807347674393623501968236227291033035789196885119308906924427\
   8132844994867389810274167598644887357094555229347268008929339025168326794007981081658719300
6,
   333.333166666624999979166653645824218743164057128901885982691443848925146100569325605907184628971888110 21\
   952588334636035715049895174704844118537453663099290649460067722249591931418935491525112752083834944754459\
   827429154961015404886974861147221605229081687467620990306083137207151202628373117498009980 7
7,
   1054.09250068483079024421803054925438059457662909448378053460181871291227615578838241309965552330203929 48\
   921701489979101929651870383596076085157399805281241840197107959208112465666600678658208333630052848137637\
   9633412173001791416816523988217130574575775149839733638325869469229094157051266368368213492
8,
   3333.33331666666662499999979166666536458332421874993164062446289062063598629175821909192402890586850691 39\
   796415845534630119634516535684645627874543298923729458962760161962515301631338454351835540545072543050565\
   5332786893306090560740696184862859260038359695164953472118420046078642351608426316737908689
9,
   10540.92552862413500506473056904860663706427999991540915487206613257781129486376775765527909855667347265 8\
   204791665205081331032825977200866113253854441992336263000572840576251992541043642917427549498010345487775\
   4354243622790474844658846392252602300319355089391916716676780850215129655232683522245812483
10,
   33333.33333166666666666249999999997916666666536458333324218749999316406249946289062495635986327761332193979\
   504903154882431030039842923461594978966457396745515711605533810262566922943806149953365081512827599746583\
   0549941510916958629623641600634333923713338089461890741113553102094874011670487487584704131
11,
   1.05409255338418931456600403976732392120446259957611356041214690587833381242181666311870602955307387719 50\
```

Comme on le constate dans les listings ci-dessus, et plus encore pour les grandes valeurs de n (voir listing ci-après), le développement décimal des racines carrées des repunits d'indice pair a une forme très particulière, avec des blocs de longueurs variables constitués de chiffres identiques, uniquement des 3, des 6 et des 9, et entre ces blocs des motifs de transition qui sont toujours les mêmes d'un repunit à l'autre : 1,24, 791, 536458, etc…

```
24,
    3.33333333333333333333333316666666666666666666666666249999999999999999999999791666666666666666666666665364583\
    333333333333333332421874999999999999999999316406249999999999999999462890624999999999999999563598632812499\
    9999999996363321940104166666666663575490315755208333333330663681030273437499999997664054235 10^11
25,
    1.0540925533894597773329644621062785084335295131268452174581676521135574912537562317390259318658014252818\
    409843469928138262190975970029311782065050116789230568602614329356460691315317213666879858918213523995412\
    5789247353468247578217974057045953297942987189888102578149169648752598429405313275044998477 10^12
26,
    3.33333333333333333333333333166666666666666666666666666624999999999999999999999999791666666666666666666666\
    653645833333333333333333333332421874999999999999999999993164062499999999999999999462890624999999999999999\
    95635986328124999999999999963633219401041666666666666357549031575520833333333330663681030 27 10^12
27,
    1.0540925533894597773329645142838599012117884911085900180819536261372564841589227048879211705025116584007\
    150744909855049673416299142808764752579425606089305285037181923862194762525166263360041837399352609403422\
    9478542972595273682898202415697705306389780298307550501136233743144791750731176531896171491 10^13
28,
    3.33333333333333333333333333333166666666666666666666666666666624999999999999999999999999997916666666666666666\
    666666666536458333333333333333333333324218749999999999999999999999316406249999999999999999999946289062499\
    9999999999999999956359863281249999999999999999636332194010416666666666666663575490315755208 33 10^13
29,
    1.0540925533894597773329645148056357151395710808884074530451005772177481860669873836802183258304373560104\
    004259683121891719397928828549229093466822742906128737087523096059217665478731856380919430594853563542083\
    2177626488486589447668749702193470667566215534611185489462372352397732348860943910213227796 10^14
```

A y regarder de plus près, les repunits d'indices impairs possèdent aussi des motifs particuliers, comme la séquence 054092553389459777 au départ de chaque développement par exemple.

Le calcul formel présenté dans les listings d'écran ci-après donne une explication de ce phénomène, pour les indices pairs. Par égard pour le lecteur, nous donnerons aussi une version rédigée de ce calcul.

```
> # Etude de la racine carrée du 12-ième repunit d'après son développement décimal

  # en prenant en compte les 49 premiers chiffres :  (43=49-6) ( a est ensuite remplacé par 10)
  # voici, calculé d'après le développement décimal,  le développement formel multiplié par 3 :

> 12,
    3.33333333333166666666666624999999999979166666666653645833333242187499999931640624999946289062499956359\
    8632812136332194010107549031575253868103027110155423482052473227182839587330818010218441486208158778026 5\
    628140186889702019689137820293399271415023158623540421040160236381968842622024229739605848944 10^5
>
> f := proc(a)

  d := ((a^12 - 1)·a^37 + 3·a^36 + 2·(a^12 - 1)·a^24 + 72·a^22 + 3·(a^12 - 1)·a^10 - 2·a^11 + a^9
      + 6·(a^9 - 1))·(a^(-43)) :
  return d :
  end;
Warning, `d` is implicitly declared local to procedure `f`
f := proc(a)                                                                                    (1)
    local d;
    d := ((a^12 - 1)*a^37 + 3*a^36 + (2*a^12 - 2)*a^24 + 72*a^22 + (3*a^12 - 3)*a^10 - 2*a^11 + 7*a
    ^9 - 6)/a^43;
    return d
end proc
> d := f(a);
```

$$d := \frac{(a^{12}-1)\,a^{37}+3\,a^{36}+(2\,a^{12}-2)\,a^{24}+72\,a^{22}+(3\,a^{12}-3)\,a^{10}-2\,a^{11}+7\,a^{9}-6}{a^{43}} \qquad (2)$$

```
> d1 := expand(d);
```

$$d1 := a^{6}-\frac{1}{a^{6}}+\frac{5}{a^{7}}-\frac{2}{a^{19}}+\frac{75}{a^{21}}-\frac{3}{a^{33}}-\frac{2}{a^{32}}+\frac{7}{a^{34}}-\frac{6}{a^{43}} \qquad (3)$$

Si on recopie sous forme d'une formule algébrique le développement de $3\sqrt{R_{12}}$, on obtient :

$$d = (3R_{12}.10^{37} + 1.10^{36} + 6R_{12}.10^{24} + 24.10^{22} + 9R_{12}.10^{10} - 2.10^{11} + 1.10^{9} + 6R_{9}).10^{-43}$$

(les termes avec R_j correspondent aux motifs à un seul chiffre, et les termes sans R_j sont des correctifs rendant compte du fait que ces motifs ne sont pas juxtaposés exactement)

Grâce à la relation $9R_n = 10^n - 1$, on obtient :

$$3d = \big((10^{49}-1).10^{37} + 3.10^{36} + 2(10^{12}-1).10^{24} + 72.10^{22} + 3(10^{12}-1).10^{10} - 6.10^{11} + \ldots \quad).10^{-43}$$
$\cong 10^{6} - 10^{-6} + 5.10^{-7}$ (à 10^{-18} près)

Ne retenant que les termes supérieurs à 10^{-12} pour le calcul de $(3d)^2$, cela donne :

$9d^2 \cong 10^{12} - 2 + 1 - 10^{-12} + 10^{-12}$ (les termes centraux sont les doubles produits)

c'est-à-dire $9d^2 \cong 10^{12} - 1 = 9R_{12}$; $d^2 \cong R_{12}$ (à 10^{-12} près)

En fait, la précision est de 10^{-25} grâce à des compensations dans les termes suivants ; si on reprend le calcul formel Maple ci-dessous (où $a = 10^{-1}$), ces compensations s'écrivent :

$$(-1400 + 250 + 150).10^{-15} = -10^{-12} \; \textit{compensé avec le terme} \; + 10^{-12}$$
$$(4000 - 2400 - 1560 + 764).10^{-28} = 1{,}004.10^{-25}$$

Il est clair, au vu de ces calculs, que les chiffres des motifs et les chiffres de transition s'ajustent exactement ; c'est ce qui explique leur permanence dans tous les développements d'indices pairs (seule la longueur des motifs varie).

```
> sort(expand(d1^2));
```

$$a^{12} + \frac{10}{a} + \frac{1}{a^{12}} - \frac{14}{a^{13}} + \frac{25}{a^{14}} + \frac{150}{a^{15}} + \frac{4}{a^{25}} - \frac{24}{a^{26}} - \frac{156}{a^{27}} + \frac{764}{a^{28}} - \frac{12}{a^{37}} + \frac{8}{a^{38}} - \frac{14}{a^{39}} - \frac{344}{a^{40}} + \frac{70}{a^{41}} + \frac{5625}{a^{42}} + \frac{12}{a^{49}} - \frac{60}{a^{50}} + \frac{8}{a^{51}} + \frac{12}{a^{52}} - \frac{328}{a^{53}} - \frac{450}{a^{54}} + \frac{1050}{a^{55}} + \frac{24}{a^{62}} - \frac{896}{a^{64}} + \frac{12}{a^{65}} - \frac{19}{a^{66}} - \frac{42}{a^{67}} + \frac{49}{a^{68}} + \frac{24}{a^{75}} + \frac{36}{a^{76}} - \frac{84}{a^{77}} + \frac{36}{a^{86}} - 2 \qquad (4)$$

```
> a := 10 :
> evalf(d1^2, 40);
```

$$9.99999999999000000000000000000000000804\ 10^{11} \qquad (5)$$

```
> # la précision est de 37-12=25 chiffres après la virgule
>
> #``
>
> # Etude de la racine carrée du 40-ième repunit d'après son développement décimal

  # en prenant en compte les 204 premiers chiffres :  (184=204-20) ( a est ensuite remplacé par 10)
  # voici, calculé d'après le développement décimal,  le développement formel multiplié par 3 :
>
> 40,
```

3.33333333333333333333333333333333333333316666666666666666666666666666666666666666624999999999999999999999\
9999999999999999999791666666666666666666666666666666666666653645833333333333333333333333333333333242187\
4999999999999999999999999999999999931640624999999999999999999999999999999999462890625000000000 10^{19}

```
>
> f := proc(a) :
  d := ((a^40 - 1)·a^164 + 3·a^163 + 2·(a^40 - 1)·a^123 + 72·a^121 + 3·(a^40 - 1)·a^81 - 6·a^82 + 3
    ·a^80 + 2·(a^40 - 1)·a^40 - 39·a^42 + (a^40 - 1) - 375·a^37 - 91)·(a^(-184));
  return d :
   end;
```

6) Les Repunits en base 2, 3 ou 5

On a cherché pour les bases de numération 2, 3 ou 5 d'eventuelles exceptions à la loi de formation des périodes comme en 3d).

On trouve, en base 2, les exceptions $p_1 = 1093$ et $p_2 = 3511$ (pas d'autre exception jusqu'à $4{,}8 \times 10^{10}$), leur écriture binaire est assez remarquable :

$$p_1 = 10001000101, \qquad p_2 = 110110110111$$

En effet, elle fait apparaître un motif quasi-périodique : un premier pattern, 101 ou 111, suivi d'une période, deux fois 1000, ou trois fois 110.

On a recherché d'autres exceptions parmi tous les nombres premiers de cette forme d'écriture en numération binaire, à savoir, un pattern de k digits binaires, suivi d'une période de n chiffres itérée m fois, avec $1 \leq m \leq 20,\ 1 \leq k \leq n,\ 2 \leq n \leq 8$ (pour $n = 8$, on s'est limité à $m \leq 15$ itérations).

Cela n'a pas permis de mettre en évidence une troisième exception.

En base 3, on trouve l'exception $p = 1006003 = 2 \times 3^2 \times (2 \times 3^2 \times 5 \times (2^3 \times 3 - 1) - 1)$; (et pas d'autre exception jusqu'à $8{,}9 \times 10^6$)

En base 5, on trouve les exceptions :

$p = 20771 = 2 \times 5 \times (2^5 - 1) \times (2^2 \times (2^4 + 1) - 1)$
$p = 40487 = 2 \times (2^5 - 1) \times (2 \times 3 \times (2 \times 5 \times 11 - 1))$;

(et pas d'autre exception jusqu'à $1{,}5 \times 10^7$)

On a ensuite étudié des séquences de nombres premiers p sur toutes les bases de numération comprises entre 2 et $p - 1$, ce qui nous a donné un taux compris entre 50 % et 70 % de nombres premiers « à exception » (c'est-à-dire, faisant exception pour au moins une base de numération) ; on a cherché à caractériser ces nombres par différents critères statistiques liés à la factorisation de $p - 1$, mais cela n'a pas donné de résultat.